



BIBLIOTHECA
UNIV. JAGELL.
CRACOVENSIS

stat.komp.

594957

Mag. St. Dr.

II



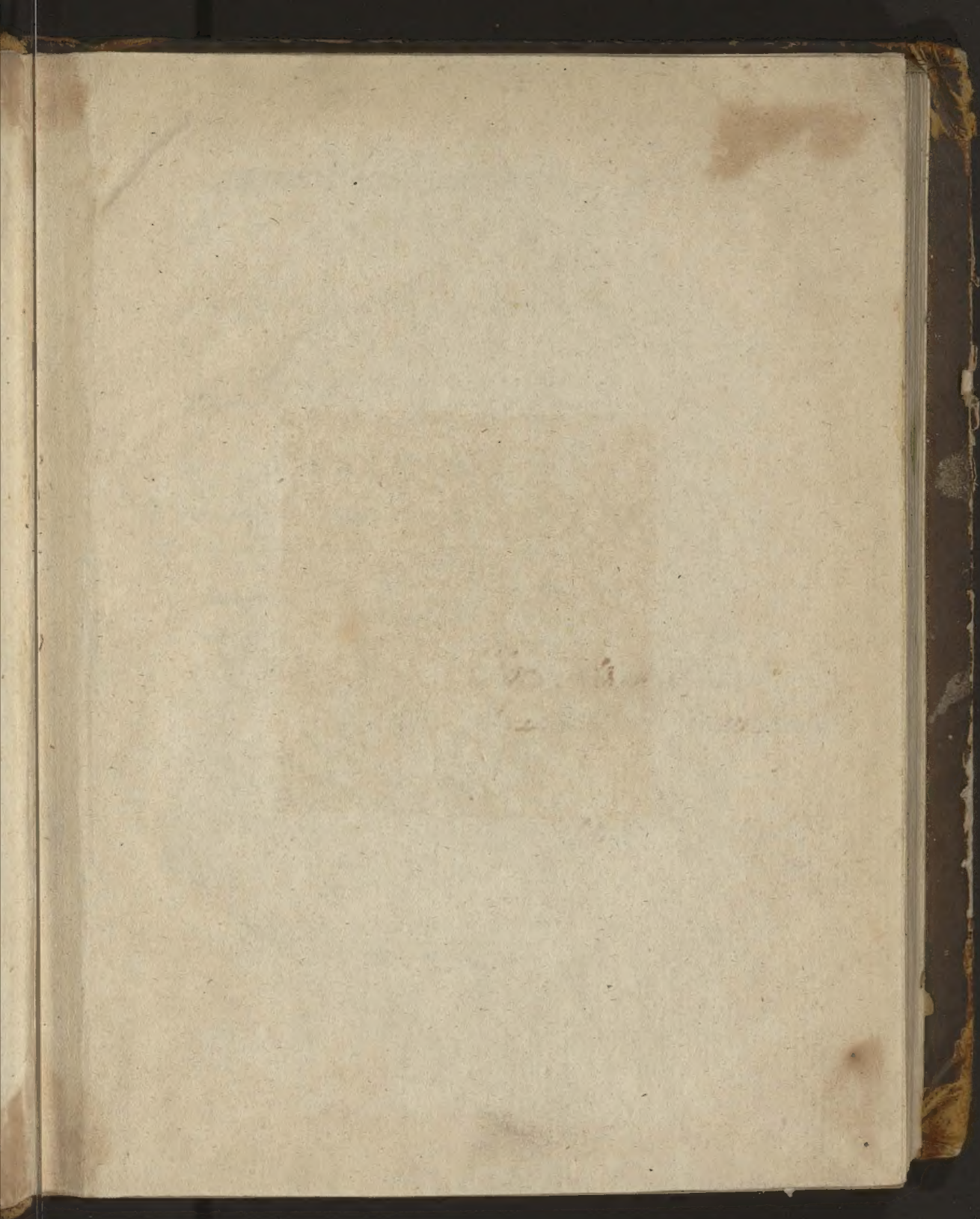
594957 II M

Mag. St. Dr.

Nr. B. 38. (1:2)

K. S. II. 1. 6. L. S

Spec. Art. Grac. 4^e 197.



Handwritten text, possibly a signature or date, in red ink.

Handwritten text, possibly a signature or date, in red ink.

RACHUNKU ALGEBRAICZNEGO

TEORYA

Przystósowana do linii krzywych

Przez

Iána SNIADOCKIEGO w Szkole Głównej Koronnej
Matematyki wyższej i Astronomii Profesora,
tęże Szkoły Sekretarza.

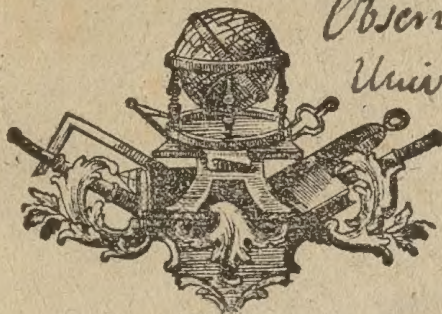
TOM II.

w którym się przez zrównania nieoznaczone tłumaczy
właściwości LINII i POWIERZCHNI KRZYWYCH;

Zamyka sięm Tablicę s Figurami.

Cena dwóch Tomów Zł. 12.

Znajdują się do przedania {
w Krakowie w Drukarni Szkoły Głó-
wnej Koronnej.
w Warszawie u II. XX. Piarów.

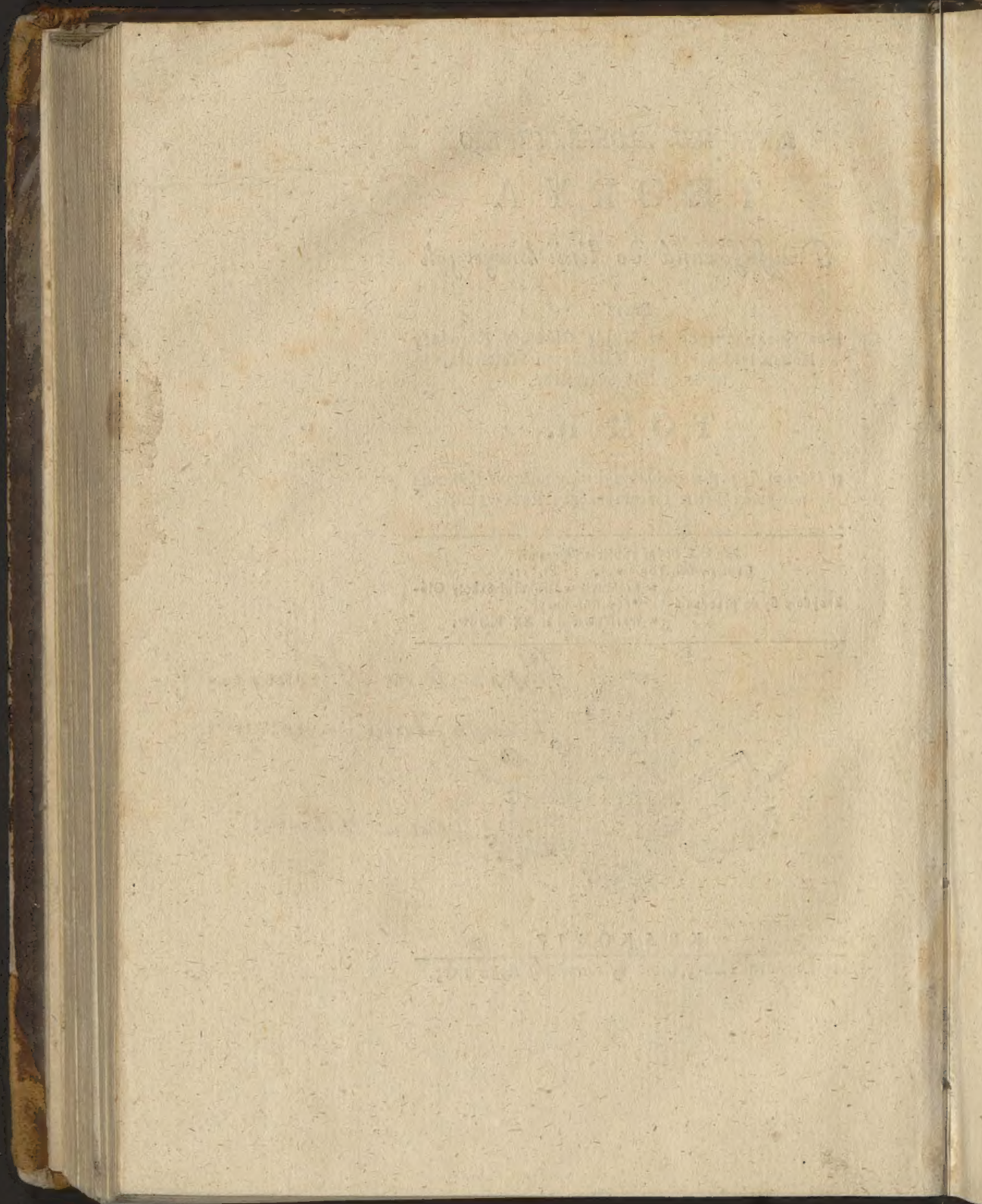


*Observatorio Astronomici
Universitatis Cracovianae*

Donum Authen.

W KRAKOWIE

w Drukarni Szkoły Głównej Koronnej Roku 1783.



ROZDZIAŁ PIERWSZY.

Ilości i funkcy w zrównanie iakiégokolwiek stopnia wchodzące wyrażają się przez linie geometryczne: z różnych odmian tym ilościom lub funkcyom nadanych, tłómaczą się odmiany, które odpowiadają liniom.

§. I.

Zadając sobie jakie pytanie w pierwszym Tomie, potrafiłiśmy wszystkie okoliczności i warunki do niego przywiązane w zrównaniu zamknąć. Rozwiązawszy potem to zrównanie, a mając przytomne na umyśle znaczenia nadane wyrazom i znakom użytym, odkrywaliśmy prawdy, którychśmy się czasem ani spodziewali, ani ie nawet sądzili za związkowe s tem, czegośmy szukali. Jedno zrównanie dobrze obięte umyśłem, stało nam się xiążką do czytania nowych między ilościami związków. To iefzcze przerobione w postać prościęyszą, lub złączone zreczenie z innemi, pokazywało nam nowe prawdy i sfunkki, tak dalece, iż będąc szczęśliwym w kombinowaniu, zrównanie w ręku biegłego Analisty staie się składem nąyskrytfzych prawd związkowych rozrzuconych po naturze. S tąd powinniśmy się przekonać, iż wszystkie własności iakięykolwiek ilości, wszystkie kondycye do niey przywiązane, byleby nie były między sobą przeciwne, wyrazić można przez Algebraiczne zrównanie. Idzie tylko o dwie rzeczy, naprzód: aby ilość przedfiewziętą nie była nad to zawikłaną dla uwąg geometrycznych; powtóre: aby dostrzec związku zachodzącego między okolicznościami zadania; częstokroć niedostatek tamtęy kondycyi załatania przed rozumem naszym tén ostatni szrodek wynalezienia tego, cośmy sobie zadali.

Linie Geometryczne są ilościami barzo prostemi; wszystkie więc ich własności możemy wyrazić w

A

zrównaniu

Przeyscie z
Algebry do
Geometrii,

zrównaniu algebraicznem. Wszakże Geometrią początkową porównywa iedne figury z drugimi, s porównywania rodzi się zrównanie, które zawiera w krótkości te związki, któreśmy między figurami związali. Kombinacya tych związków z innemi, odkrywa nowe inne, a te znowu ostatnie odsłaniają świeżę prawdę wypadającą s pierwszych: tak dalece, iż przerabiając, wiążąc własności linii, figur, i ciał geometrycznych, przyszlibyśmy do wyrażenia wszystkich prawd geometryi elementarney przez znaki ogólne, gdyby to nie było z większym dla rozumu naszego pożytkiem zostawić tak proste stofunki samemu działaniu duszy, a rozumowanie przez znaki symboliczne zawikłéyszym związkom i dociekaniom zachować. Zgadzamy się więc s całą rzęsą gorliwych o ćwiczenie rozumu ludzkiego Geometrów, że sposoby uważania, dowodzenia i porównywania ilości rościągłéy, w barzo gruntowném i ściśłém świetle podane od starożytności należy przy swéy całosci w geometryi początkowéy utrzymać. Ale chcąc także kombinacye do odległéyszey ogólności wynieść, przedrzeć się w strasznie zawikłane Figur trudnéyszych związki, które w starożytności samym tylko extraordinarynym były dostępne rozumom, chcąc ułatwić niezmiernie zawaloną drogę dociekań w głębszey geometryi, i uczynić sobie náywyższé prądwy dostępneyszym; trzeba było koniecznie wespréc rozum ludzki ogólnemi znakami, natrafić na szczęśliwą zręczność stósowania rachunku do Figur. Tę przyługę winniśmy nieśmiertelney przenikłosci Des-Carta która stała się razem zródłem rozległéy sławy dla swégo wynalázcy, i náyłżeśliwszych dociekań dla iego następców. Zapomniaymy na moment o sposobie Des-Carta, abyśmy się sami postawili w okolicznosci pierwszych wynalázców.

Chcąc znaczenia algebraiczne do geometryi przynieść, rostrząsnąć nam należy wszystkie wyrazy w skład zrównania wchodzące, i szukać im odpowiadających

iących w geometryi znaków. Zważaliśmy w algebrze różnego rodzaju funkcyje, s tych powstające róż-
 żnych stopni i gatunków zrównania. W funkcyach
 naprzód różniliśmy zawsze ilości znane od niezna-
 nych; teraz chcąc rozszerzyć dalej ten podział dla
 tego, że nąypierwszą jest w geometryi rzeczą po-
 równywanie między sobą ilości, włożemy na miej-
 sce znanych i nieznanich, ilości stateczne i odmiennę,
 które iako wiemy też same mają znaki. Wziąwszy
 więc linią prostą pewną iakię nieodmiennę wiel-
 kości, możemy przez nią reprezentować iakakol-
 wiek ilość stateczną; ilości zaś odmiennę wyrażemy
 barzo dobrze przez linią nieoznaczoną RS. od któ-
 réy taką możemy odciąć cząstkę, iaką nam się tylko
 podobą, a zatem iako n. p. x może zawierać wszy-
 stkie iakiękolwiek oznaczone wartości, tak linią RS,
 wyrażać może wszystkie iakiękolwiek podziały. Ta-
 kowe podziały nazywać będziemy ODCINKAMI (*Ab-*
scissae), które będą wyrażać pewne oznaczone warto-
 ści ilości odmiennę x . Aże linia RS nie má za-
 dnej określonej wielkości, uciniki takowe brać się
 mogą od A na obydwie strony. Miejsce A nazy-
 wać będziemy POCZĄTKIEM ODCINKÓW (*Initium Ab-*
scissarum): odcinki zaś z iednej strony A brać be-
 dziemy za dodatné, a z drugiej strony za odmiennę.
 Iako miejsce A , tak stronę odcinków dodatnych za-
 leży od upodobania, byleby obrówszy iedną stronę
 za dodatną, drugą ię przeciwną wziąć za stronę od-
 cinków odmiennych.

Odmięniwszy funkcyą na zrównanie w którejby
 nie było tylko x i ilości stateczne, x przestaje być
 ilością odmienną. Chcąc więc dochować x własności
 odmiennę, potrzeba koniecznie w zrównaniu mieć
 dwie ilości odmiennę x, y ; tak, żeby pewną funkcyą
 x , była równą pewną funkcy y . W ten czas bo-
 wiem obydwie zostaną się przy swym charakterze
 odmienności iako wiemy s teoryi pytań nieoznaczo-
 nych. Tu otwierą nam się niezmiernie pole docie-

Znaczenia al-
 gebraiczne wy-
 łożone w lini-
 ach geometry-
 cznych.

Figura 1.

ką, ile bowiem wymyślić się może gatunków funkcji x, y , tyle nam wypadnie kombinacji. Każda z tych kombinacji będzie źródłem nowych związków między ilościami, którym odpowiadaia nowe w geometrii znaczenia. Idzie tylko o sposób wyrażenia tych znaczeń; zaczniemy od najprościejzych. Jeżeli y będzie pewną funkcją x ; każdej wartości x , powinna odpowiadać pewna wartość na y . Wyrazimy tę wartość przez linią prostą postawioną na uciinkach linii RS , tak n.p. że jeżeli $x=AP$, y będzie miała wartość wyrażoną przez PM ; jeżeli $x=AQ$, $y=QN$, jeżeli $x=0$, $y=AB$. takowe linie AB , PM ; i t.d. odpowiadające wartościom pewnym odcinków nazywać zawsze będziemy PRZYSTAWAMI (*Applicatae, ordinatae*); które będą równo-ległe linii prostej AB , uważając ją przeciągniętą na obydwie strony RS , do jakiejkolwiek bądź wielkości. Takową linią będzie znówu linią przystaw; a iako pewne wielkości przystaw odpowiadają pewnej wartości odcinków z zrównania wyciągnionych, stawiane bydy powinny na tych miejscach linii RS , gdzie się kończą wartości nadane x . Jeżeli na y wypadają będą wartości dodatne, te będziemy kładź nad linią RS ; jeżeli zaś odjemne, te położymy pod linią AS . Może się zaś przytrafić, że odcinkom dodatnym będą odpowiadać przystawy dodatne albo przystawy odjemne: powtórę odcinki będąc odjemne, przystawy wypadną odjemne albo dodatne. W pierwszym razie położymy je nad AS , w drugim pod AS , w trzecim pod AR , a w czwartym nad AR , tak że n.p. PM jest przystawą dodatną, rb przystawą odjemną, należące obydwie do odcinków dodatnych: przeciwnie rn jest przystawą dodatną, a pm przystawą odjemną odpowiadające obydwie odcinkom odjemnym.

Nie potrzeba nam się o tem ostrzegać, że ilość większa lub mniejsza przystaw AB , PM , QN , i t.d. zawisła od funkcji y . Rzecz bowiem oczywista że zrównanie zawierające związek między x, y , zawiera razem

ra razem stosunek między odcinkami i przystawami, które odtąd razem brane nazywać będziemy WSPÓŁUSZYKOWANEMI (*Coordinatae*), ten stosunek jest prawem, podług którego układają się wartości przystaw z wartości odcinków tak, że ich wzrost lub ubywanie, jest zawsze jednostrajnym wypadkiem pewnego między x , y prawa w zrównaniu zawartego. Ciągając podług takowego prawa szereg przystaw odpowiadający szeregowi odcinków, a ścigając punkt B , widzimy, że on przenosząc się na różne miejsca, zostawia po sobie ślad nową linię prostą lub krzywą, której natura i postać zależy od związku między x , y : i tak przypuścimy że linia prosta na figurze

Figura 2. 3.

2. lub linia krzywa na figurze 3. jest odrysowana po dług zrównania pierwszego stopnia między dwiema odmiennymi x , y ; w tym zrównaniu odmienniając x , czyli AP , odmienniać się będzie y , czyli PM ; i idąc po wszystkich punktach linii RS , począwszy od A , znajdziemy przystawy tym odcinkom odpowiadające i naczynające miejsce, przez które linia prosta BMN , lub krzywa EBM , przechodzi: właśnie iak gdyby punkt B , ruszywszy się szedł do M , prowadzony przez przystawę PM , odmienniając na każdym miejscu swoje kierowanie tak, iak PM , swoje wielkość odmiennia; w tym biegu opiszę punkt B linią prostą lub krzywą BM , odmienniając swoje położenie podług prawa zamkniętego w zrównaniu, którym się związek współ-uzyskowanych, w nim zaś natura linii krzywej wyraża. Widzimy więc że uwagi nasze zgadzają się zupełnie s sposobem dawnych Geometrów, którzy sobie wystawiali linie krzywe, iako opisanie biegiem punktu w każdym momencie swe położenie odmienniającego; lubo uwagi nasze daleko są prościelsze i ogólniejsze, iak się niżej przekonamy.

Każdy pierwiastek zrównania wyrażającego linią EBM , daie nam jeden punkt linii krzywej, bo nam daie miejsce, w którym przystawa też linią krzywą przecina: aże zrównanie pierwszego stopnia, podług

A₃

którego

GEOMETRYI WĘZSZÉJ

którego wystawiliśmy sobie linią EBM odryfowaną, powinno koniecznie mieć ieden pierwiastek rzetelny; nie może być żadnej wartości na x , któryby nie odpowiadał wartości na y ; przeto na linii RS, nie-masz żadnego miéysca, s któregoby wystawioną przystawa nie przecinała linii krzywéy: a iako x na-znaczać możemy nieskończoną liczbę wartości, tak będzie nieskończona liczba przystaw idących i prze-cinających raz linią krzywą; to jest PM, odmiéniając swoję wielkość póydzie po linii RS w nieskończoną odległość, i linia krzywa rościagnie swóy łuk bez koń-ca, który nazywać będziemy Odnogą NIESKONCZONĄ linii krzywéy (*Ramus curvae infinitus*), rościagnie się zaś bez końca na dwie strony, to jest na stronę AR i na stronę AS, gdyż za x , możemy kładź wartości dodatné i odjemné. Jeżeli na wszystkie wartości do-datné x , będą wypadać przystawy dodatné; całą od-noga nieskończoną linii krzywéy będzie leżyć nad li-nią AS: jeżeli zaś na wszystkie wartości dodatné x , wypadać będą przystawy odjemné, ponieważż ułoży-liśmy ie stawiać pod AS; całą odnoga linii krzywéy będzie leżyć pod AS. Jeżeli zaś na odcinki dodatné x , wypadać będą wartości na y , náprzód dodatné a potem odjemné; ponieważż podług §. XVI. Algebry nie może $+y$ stać się $-y$, póki wprzód nie stanie się $y=0$, więc będzie między wartościami $+x$, iedna, którą uczyni $y=0$, i w tém miéyscu linia krzywa przetnie ós, iak n. p. w miéyscu O , a przefzedłszy pod nie rościagnie się bez końca, jeżeli iuż odtąd na $+x$, bę-dą bez końca wypadać przystawy odjemné: jeżeli zaś znowu po pewnéj liczbie wartości, $-y$ stanie się $+y$, więc znowu linia krzywa przetnie drugi raz ós, i przeniesie się nad linią RS. To cośmy mówili o wartościach $+x$ służy także na $-x$, to jest: że ie-żeli $z-x$, wypadać zawfze będą y dodatné; całą odnoga nieskończoną linii krzywéy leżyć będzie nad AR; będzie zaś leżyć pod AR, jeżeli $-x$ uczyni wszystkie y odjemné: jeżeli nakoniec $-x$, czynić bę-dzie

dzie y czasem dodatné, a czasem odjemné, linią krzywą przecinając oś, przenosić się będzie, raz nad, a drugi raz pod AR . Té wszystkie własności wyciągnęliśmy z uwag nad zrównaniem sfówanych do znaczeń geometrycznych: inne iakiękolwiek zrównania podobnie rostrzając wyciągnęmy z nich różnego rodzaju, i różné figury linie krzywe. Przeto każde zrównanie między dwiema iakiękolwiek odmiennymi ilościami, uważać możemy, iako wyrażające naturę pewnéj linii prostej lub krzywej przywiązanej do prawa między współ-ufzykowanemi w zrównaniu zamkniętego: i znowu przeciwnie każdą linią geometryczną prostą lub krzywą odryfowaną podług iakięgo prawa, zważać możemy iako wyraz graficzny pewnego zrównania takowe prawo zamyskającego. Jeżeli cała linia odryfowana jest podług jednégo prawa, albo co na iedno wyńdzie podług tegoż samego zrównania, nazywają się linią CIĄGLĄ (*Continua*), a prawo ięj naturę wyrażające nazywają się PRAWEM CIĄGŁOŚCI (*Lex continuitatis*); jeżeli zaś linia jest tak odryfowaną, że ięj porcyje należą do różnych zrównań, iaką byż może linia za posunięciem piora odryta, złożoną z ułomków częścią prostych, częścią krzywych, takową linią zowie się RÓŻNO-CIĄGLĄ, NIEFOREMNĄ (*Discontinua, irregularis*). Wszystkie linie, które w geometryi uważać się zwykły, są ciągłemi, odrytymi podług prawa ciągłości w zrównaniu wyrażonego, tak n.p. linia krzywa na figurze 3. $mEBMO$, jest linią ciągłą, jeżeli w nięj każda przystawa jest funkcją tąż samą odcinku wyrażoną przez iakie zrównanie. Prawda że J. P. Euler nappierwszy wprowadził do geometryi linie nawet nieforemne, co wiele narobiło między Geometrami sprzeczki, ale to ieszeze me czas dla nas o tym mówić. Dosyć nam teraz wiedzieć, że wszystkie linie, które będą przedmiotami naszey uwagi w ciągu teraznięyzey nauki będą ciągłemi. Linią RS , na której się rachują odcinki nazywać będziemy OSIĄ albo

KIEROWNICĄ (*Axis, Directrix*). Mówiąc o odcinkach i przystawach razem, ułożyliśmy sobie nazywać je współ-ufzykowanemi: jeżeli przystawy będą stać prosto-padle na osi czyniąc kąt prosty z odcinkami, nazywać je będziemy WSPÓŁ-USZYKOWANEMI PIONOWEMI (*Coordinatae orthogonales, normales*), jeżeli zaś stać będą pochyło czyniąc kąt ukośny, nazwiemy je UKOŚNEMI (*Coordinatae obliquangulae*).

S tych ogólnych uwag wypada ten sam podział linii, na któryśmy rozebrali funkcye w pierwszym Tomie. Jeżeli y będzie takową funkcją x , którą można w zrównaniu algebraicznem zupełnie zawrzeć; linią takowem zrównaniem oznaczoną zwać się będzie ALGEBRAICZNĄ (*Curva Algebraica*). Jeżeli zaś y będzie funkcją x taką, iż iey pierwiastków i wartości niepodobną jest w zrównaniu ogarnąć, nazwiemy ją PRZESTĘPNĄ (*Curva Transcendens*). Pierwszy rodzaj nazywają niektórzy GEOMETRYCZNYM, ostatni MECHANICZNYM. (*Curvae Geometricae, Mechanicae*). Ten atoli ogólny linii podział, zawierać w sobie będzie szczególniejsze rozłożenia, wypadające s podziału zrównań i funkcyi co do wymiarów, i co do liczby ilości odmiennych.

§. II.

Właściści li-
nii krzywych
wyciągnione
z natury zró-
wnań,

Wniydzmy już w szczególniejsze rozbiory linii, i zrównań. Zważaliśmy w pierwszey Części funkcye wyrażające iednę tylko lub kilka na raz wartości ilości odmiennę; to jest: że y może być taką funkcją x , iż iey albo iedna tylko, albo kilka na raz odpowiada wartości, podług znaku pierwiastkowego położonego przed y : wiemy bowiem że znaki pierwiastkowe wyrażając kilka na raz wartości są wątpliwemi. Nazwaliśmy takowe funkcye z J. P. Eule-rem IEDNO-KSZTAŁTNE, DWÓ-KSZTAŁTNE, KILKO-KSZTAŁTNE, (*Functiones Uniformes, Biformes, Multi-formes*), podług wykładnika znaku pierwiastkowego którym jest naznaczone y : a w znaczeniu Geometrycznem wypada, że jeżeli y będzie funkcją jedno-kształtną

kształtną x , na ten czas każdemu odcinkowi x , iedna tylko będzie odpowiadać przystawa: biorąc za x wszystkie wartości dodatnie i odjemne od 0 aż do

$\pm \frac{x}{\sigma}$ otrzymamy tyleż przystaw; zatem linią krzywą takowem zrównaniem wyrażoną rościagnie się bez końca na obydwie strony osi RS: taką linią reprezentować może (Fig. 3); własność zaś ta służyć będzie ogólnie wszystkim liniom, których zrównania nie będą zawierać żadnego znaku pierwiastkowego, iakośmy to już w §. 1. obszernie wyłożyli.

Jeżeli zaś y będzie funkcją dwó-kształtną x , iaką zamykają zrównanie $y^2 = 2Py - Q$, czyli $y = P \pm \sqrt{P^2 - Q}$ gdzie P i Q są funkcjami iedno-kształtnymi x ; na ten czas każdej wartości x będą odpowiadać dwie przystawy, obydwie rzetelne jeżeli $P^2 > Q$; lub oby. Fig. 4: dwie uroione, jeżeli $P^2 < Q$: tak n.p. biorąc $x = +AP$, otrzymamy na y PM , PM ; znowu $x = -AP$, będzie $y = Pm$, Pm ; jeżeli $P^2 > Q$ linia krzywa takowem zrównaniem opisaną będzie przechodzić przez te przystawy; jeżeli zaś $P^2 < Q$ linia tamtędy nie przejdzie. Ale będąc $P^2 > Q$, nie może się odmienić na $P^2 < Q$ póki wprzód nie przejdzie przez środkuiący stan $P^2 = Q$, i na ten czas $y = P \pm 0$, a zatem obydwie przystawy na obydwóch stronach staną się równemi, czyli zniyda się w iedno miejsce, gdzie przystawa będzie stycznią linii krzywéy, a punkt dotykaniá się będzie punktem dwoistym, iakim iest w miejscach n.p. C, G. Przechodząc już za ten stan, wszystkie wartości y są uroionemi; więc za punkt dotykaniá się linia nie przestępuje, ale od niego zwraca się nazad. Jeżeli zaś za C znajduje się miejsce przystaw uroionych; i znowu za G ku prawéy idąc stronie, miejsce przystaw rzetelnych; idzie zatem, że zmniejszając wartość odcinku $-x$, czyli pomykając się od G ku A, wpadniemy na krainę przystaw uroionych, gdzie się musi skończyć odnoga linii krzywéy idący od G, a zacząć się granica uroionych przystaw, przez które linią krzywą nie przechodzi; przeto znowu w

As

tamtém

tamtém miejscu, y będzie przechodzić s stanu rzetelnego na uroiony przez $P^2=Q$, i przystawa będzie styczną, od której linia krzywa cofnie się назад. Na tén czas linia będzie miała dwie odnogi od siebie oderwane $MBDB$, $FmHm$, które będą należyć do iednéy linii krzywéy, ponieważ obydwie wypadają z iednéy funkcyi.

Takowé oderwané odnogi co do swéy postaci i liczby zawisły od zrównania $P^2=Q=0$. Iłé bowiem zrównanie to zamykà pierwiastków, tyle iest miéysc na osi, gdzie przystawa dotyka się linii krzywéy, i pokazuje zwrócanie się odnogi od swéy stycznej. Té pierwiastki albo są równe albo nierówne: w pierwszym przypadku pokazują że dwie styczne ichodzą się; które ieżeli przedtém zamykały między sobą odnogę linii krzywéy iakié są na fig. 4. GH, FE ; szedłszy się razém, odnoga ta zamiénia się w punkt nazwany PUNKTEM SPRZĘŻONYM (*Punctum conjugatum*.) Ieżeli zaś dwie takowé styczne zamykały miéysce przystaw uroionych, iakié są FE, DC ; szedłszy się razém, odnoga Hmf oderwana, złączy się z odnogą BDB i powstanie stąd węzeł, iaki nám wyraża na figurze punkt I , i linia krzywa stanie się na tén czas LINIĄ WĘZŁOWĄ (*Curva nodata*). W drugim przypadku, to iest: kiedy zrównanie $P^2=Q=0$ má pierwiastki nierówne, każdy pierwiastek takowégo zrównania pokaże nám miéysce na osi, gdzie przystawa stawiłszy się styczną, znaczyć będzie odwrót linii krzywéy, i iey odnogi oderwané.

Niech będzie y funkcyà tróy-kształtną x , zamknietą w zrównaniu $y^3-Py^2+Qy-R=0$, gdzie P, Q, R , zamykają x bez żadnego znaku pierwiastkowégo. Ieżeli zrównanie to zamykà wszystkie trzy pierwiastki rzetelne, każdéy wartości x będą odpowiada trzy wartości na y , i linia krzywa będzie trzy razy przeciętą od przystawy iak n.p. na fig. 5. w miéyscach M, M, M , chyba że dwa punkta znidą się razém iak n.p. przy D , i na tén czas przystawa stawiłszy się styczną,

Fig. 7.

czną, naznaczy punkt dwoisty D. Jeżeli zaś zrównanie 350 stopnia zamykać będzie dwa pierwiastki uroione, na ten czas przystawa w iednym tylko mieyscu przecinać będzie linią krzywą, iak nam wyraża fig. 6. to atoli przecięcie nigdy nie może ustać, dla tego że trzeci pierwiastek stać się nie może uroionym, i linią krzywą rościagnie się bez końca z obydwóch stron początku odcinków: jeżeli trzy wartości na y będą s początku rzetelne, staną się potem uroionemi na x dodatne lub odienne; linią krzywą przy A na fig. 6. iako przy początku odcinków może mieć odnogę oderwaną iaką jest BBE. Natura iednak i postać téy odnogi, a zatem i postać samey linii krzywey nie może bydź znaną tylko przez rozwiązanie równania 350 stopnia i rostrzanie natury iego pierwiastków. Wiemy z §. 20. Algebry że wartość

Fig. 6.

na y musi zamykać w sobie prócz znaku $\sqrt{}$, znak ieszcze $\sqrt{}$; pod tym ostatnim znakiem zawartą funkcją, może mieć albo trzech mnożników nierównych i na ten czas pokazuje nam trzy mieysca na osi znaczyć odnogi oderwane: albo dwa mnożniki równe, które wyrażając zniyscie się dwóch stycznych, odkryją nam węzeł lub punkt sprzężony podług mieysca przystaw uroionych lub rzetelnych, między temi stycznymi zawartego: albo nakoniec wszystkie trzy mnożniki téy funkcyi pod znakiem $\sqrt{}$ będą równe, i na ten czas wyrażają zniyscie się trzech stycznych razem. W tym ostatnim przypadku powstaie w linii krzywey Konczystość (Cuspis), iaką sobie łatwo wystawimy na fig. 4. jeżeli odnogę BDB zaimiemy przy I na punkt sprzężony. Wszystkie te własności objaśnia nam przykłady w dalszym ciągu naszej nauki. Uczyniwszy w równaniu 350 stopnia podanem $y^3=0$, zostanie się $Py^2-Qy+R=0$, to równanie nie przestanie ieszcze wyrażać linii 350 porządku; jeżeli P, Q, R, zamykają x w stopniu 3cim; na ten czas linią krzywą nie będzie tylko dwa razy przecinaną od przystawy, jeżeli obie wartości na y

łą rzetelną, ale będzie mogła być trzy razy przeciętą od linii prostej, i te przecięcia okażą się w trzech wartościach na x , o czym mówić będziemy niżej.

Niech będzie y funkcją cztero-kształtną, x wyrażoną n.p. przez równanie $y^4 - Py^3 + Qy^2 - Ry + S = 0$. To że zamykać może albo wszystkie cztery pierwiastki rzetelne, albo wszystkie urojone, albo dwa rzetelne, a dwa urojone; linią krzywą takim równaniem opisaną może być albo w czterech, albo w dwóch punktach przeciętą od przystawy, albo w żadnym; iako widzieć możemy na fig. 7. Jeżeli pierwiastki równania podanego zacząwszy być rzetelne, staną się potem na zawsze urojone; linią krzywą nie będzie mieć żadnej odnogi nieskończonej, ale się zamknie między dwiema stycznymi w miejscach przejścia pierwiastków rzetelnych na urojone. Uważając równanie moment ten przejścia wyrażające, a razemznaczające miejsce przystawie stycznej, uważając je mówię co do swych pierwiastków, równych lub nierównych, podobnie jak w poprzedzających przykładach, znajdziemy miejsca przecięć na osi RS , liczbę odnóg oderwanych, węzły lub kończyłość linii krzywej, co wszystko lubo niżej zechcemy obszerniej wyłożyć, nie jest jednak od rzeczy namienić o tych prawdach, które s teraznięszych uwag wypadają.

Naprzód: że poznanie figury czyli ryfunku linii krzywej zależy od rozwiązania równania ją wyrażającego, i. od rostrząśnienia natury jego pierwiastków. A zatem im równanie linią krzywą wyrażające jest wyższego stopnia, tem jest zawikławsze i trudnięjsze poznanie jej ryfunku. Owszem takowe poznanie kończy się na tych liniach, których równania jesteśmy w stanie rozwiązać. Doskonałość zatem geometryi, zawiła całkiem od doskonałości teoryi równań.

Powtóre: ryfunek linii krzywej okazuje się s przecięcia

cięci*ą* i*ę* od linii prost*ę*y, to zas przecięcie co do mi*ę*ysca, liczby, i gatunku, wypad*á* z liczby i gatunku pierwiastk*ó*w. Ie*ż*eli y i*ę*st funkc*ý*ą wielokształtn*á* x dan*á* przez zrównanie stopnia n ; ka*ż*d*ę* wartości x b*ę*dzie odpowiad*á*ć wartości rzetelnych na y albo- liczba n , albo $n-2$; $n-4$, - - - $n-k$; k b*ę*d*á*ć konieczn*ie* liczb*á* p*á*rzyšt*á*. Ka*ż*d*á* wi*ę*c przyšt*á*wa b*ę*dzie przecinać lini*á* krzyw*á* w tylu punktach. Przypuścimy n.p. że i*ę*dna przyšt*á*wa przecina lini*á* krzyw*á* w m mi*ę*yscach; wszystkie inn*ę* przyšt*á*wy mus*z*á i*á* przecinać w tylu mi*ę*yscach, a*ż*by liczba przecięć różnił*á* się od m liczb*á* p*á*rzyšt*á*. Ie*ż*eli wi*ę*c raz liczba przecięć i*ę*st p*á*rzyšt*á*, wszystkie inn*ę* przecięci*á* linii krzyw*ę*y od i*á*kie*ý*kolwiek przyšt*á*wy mus*z*á by*ć* w liczbie p*á*rzyšt*ę*y, g*đ*zie rachowane by*ć* powinny punkta podw*ó*yn*ę*, potroyne, i t. d.

Potrzenie. Przecięcie ci*á*gł*ę* i nieprzerwan*ę* nigdy linii krzyw*ę*y od przyšt*á*wy, pokazanie odnogi nieskończon*ę*. To zas przecięcie skutkiem i*ę*st pierwiastk*ó*w rzetelnych w zrównaniu nie mog*á*cych się nigdy stać uroion*ę*mi. Zrównani*á* wi*ę*c nie mog*á*ć nigdy mieć wszystkich pierwiastk*ó*w uroionych; czyli zrównani*á* stopni niep*á*rzyšt*ý*ch wyr*á*żai*á* linie krzyw*ę* mai*á*c*ę* konieczn*ie* przynajmni*ę* dwie odnogi nieskończon*ę*, i*ę*dn*ę* na stronie odcink*ó*w dodatnych, drug*á* na stronie odcink*ó*w o*đ*iemnych; doda*ę* przynajmni*ę*; poniew*á*ż by*ć* może wi*ę*c*ę* takowych odn*ó*g, i*ę*żeli pierwiastki wszystkie lub kilka z nich s*á* statecznie we wszystkich wartościach x rzetelnymi. S c*z*ego się zaraz oczywiśc*ie* pokazanie, że linie krzyw*ę* wy*á*żone zrównaniem stopni*á* p*á*rzyšt*ę*go mog*á* nie mieć *ż*adn*ę*y odnogi nieskończon*ę*; albo mai*á*c i*ę*, liczba tych odn*ó*g by*ć* musi konieczn*ie* p*á*rzyšt*á*; ta ostatni*á* w*ł*áśno*ść* s*ł*u*ży* liniom krzywym stopni niep*á*rzyšt*ý*ch, to i*ę*st: że liczba wszystkich odn*ó*g musi by*ć* p*á*rzyšt*á*; a przeto nie może by*ć* *ż*adn*á* lini*á* krzyw*á*, któr*á*by m*á*ła i*ę*dn*ę* tylko odnog*ę* nieskończon*á*,

czoną, to jest ciągnącą się z iednéj tylko strony początku odcinków.

Jeżeli wartość przystawy z rozwiązania zrównania wypadająca będzie wyrażoną przez ułomek n.p.

$y = \frac{P}{Q}$, takową przystawa stanie się nieskończoną ty-

le razy, ile razy Q będzie zero, co nam pokazuje nowy przypadek, że nawet wartości skończonej na x , może odpowiadać przystawa nieskończona, co będąc właściwie samym liniom krzywym mającym odnogi nieskończone, należyć będzie rostrzafanie takowych przypadków tam, gdzie o odnogach nieskończonych linii krzywych przypadnie nam mówić.

“S tych pierwszych uwąg nad liniami krzywemi wydobytych z natury zrównań, powinniśmy sobie wnieść łatwo gatunek dociekań, które nas w dalszym ciągu téj nauki mają zaprzętać. Nim do tych przystąpimy, starajmy się wprzód lepiej zrozumieć naturę i odmiany znaczeń geometrycznych.

§. III.

Oddzielenie
rzeczy istot-
nych od arbi-
tralnych wcho-
dzących w zró-
wnanie na linię
krzywą iaką-
kolwiek.

W wszystkich tych rostrzafaniach, to jest tylko liniom krzywym istotné, że ich natura wyraża się przez związek między dwiema współ-ufzykowanemi w zrównaniu zawarty. Oprócz tego wiele barzo rzeczy wchodzi od upodobania zawiśłych, iako to: oś; iéy położenie, początek odcinków; miejsce współ-ufzykowanych dodatnych lub odiemnych; kąt nakoniec który między sobą czynią odcinki s przystawami. Té wszystkie rzeczy iako arbitralne mogą różnym podpadać odmianom; a zatém dadź zrównaniu wyrażającemu linią iaką, niezliczoną liczbę postaci, które przecięż natury linii przez to nie mogą uczynić odmiennéy. Iakże się tedy znaleźć rozumowi naszemu w szród tylu odmian, i. rozeznać czyli z wielu zrównań wystawionych pod różną postacią, każde z osobna wyraża tę samę linią co i drugie, lub inną? Widzemy że to zawiśło od ogólnego ogarnienia rzeczy. Zatrzymajmy się w szczególności nad każdą

każdą z tych odmian arbitralnych, a może tą drogą dojdziemy do jakiejś cechy, służącej nam do rozoznawania równań, a zatem do ułatwienia zachodzącej trudności.

Zacznijmy od początku odcinków, i dajmy n. p. że rachując je naprzód od A . (Fig. 8.) chcemy je potem rachować od D , iakże się nazże zrównanie w tym razie odmieni? Nazwijmy $DP(t)$; $AD(f)$, a będzie $x+f=t$, czyli $x=t-f$, tę wartość x , stosowną do nowego początku odcinków, włożywszy w podane zrównanie, otrzymamy zamiast związku między x , y ; ten sam związek między t , y ; aże f brać może nieskończoną liczbę wartości; zrównanie nazże przez tę samą różnicę odmienić się w niezliczone sposoby może: jeżeli iednak mając dwa zrównania między sobą na pozór różne, włożywszy w jedno z nich za x , $t-f$; odmienię je na drugie; mam prawo bydź pewnym, że takie zrównania obydwą wyrażają tę samą linią, ale w każdym z nich odcinki poczynają się w innem miejscu. Położyłem $t-f$; ponieważ jeżeli początek odcinków posuwa się ku lewej stronie, wypadnie $x=t-f$; jeżeli zaś ku prawej będzie $x=t+f$.

Odmienią się początek odcinków.

Fig. 8.

Wystawmy sobie teraz, że się przystawy odmieniają, to jest: że PM zamieni się na $P'M$, albo $P''M$; chcąc tę nową kondycją wprowadzić w zrównanie między x , y ; przez P' , lub P'' prowadzę oś rs równo-odległą pierwszemu; nazywam $A'A$, różnicę między nowemi i dawnemi przystawami (g); nową zaś przystawę $P'M$, albo $P''M$, (u); wypadnie więc $y+g=u$, czyli $y=u-g$; znak wyższy należy do P' ; niższy do P'' ; włożywszy tę wartość za y w zrównanie, otrzymamy nowe między u , x , zamiast pierwszego między x , y ; w tém zrównaniu można jeszcze dla tej iednej kondycyi różne czynić odmiany; dla tego że g mieć może różne iakiegokolwiek wartości, ale te wszystkie odmiany zostawiają tę samą naturę linii; tak dalece: że jeżeli z dwóch równań różnych

Odmienią się wielkość przy staw.

różnych na pozór, jedno potrafię zamienić na drugie, kładąc w niem za $y, u \pm g$; pewnie jestem, że obydwie jedną wyrażają linią, lecz każda z nich bierze różną wielkośći przystawy.

Odmiana początku odcinków i przyślaw razem.

I jeżeli zaś iak przystawy tak początek odcinków odmiennia się razem n.p. że nie tylko PM odmiennia się na $P'M$, ale i A' przeniesie się na D' , na tén czas wyrażemy obydwie té kondycye w zrównaniu, położymy za $x, (t \pm f)$; a za $y, (u \pm g)$, a tak zrównanie między x, y , przerobiemy na inné między t, u , które tę samą linią będzie wyrażać co i pierwśze.

Odmiana osi pionowey,

Przypuśćmy teraz że os RS odmiennia swoje miejsce, i przeniesie się na $R'S'$ pionowo do pierwśzey, na tén czas $R'Q = PM$, $QM = R'P$. jeżeli n.p. R' było początkiem odcinków, w téj nowéy odmianie dawne odcinki staną się teraz przystawami, a dawne przystawy odmiennia się na odcinki. Położywszy więc w zrównaniu naszém x za y , i y za x ; wprowadzemy tę nową kondycyą, która nic w naturze linii nie odmiennia. Jeżeli ieszcze strony współ-ufzykowanych dodatnych i odjemnych chcemy odmiennia, tak n.p. że przerabiając zrównanie na t, u ; tę stronę którą przed tém naznaczoną była dla linii dodatnych, weźmiemy za stronę odjemnych; a stronę odjemnych przeniesiemy na stronę dodatnych; w tym przypadku nie należy tylko za t położyć $-t$; a, za u , $-u$; a wspomniona kondycyą będzie wyrażoną.

Oś pionową przemienia się na ukośną.

Fig. 9.

Pójdźmy już do zawikłayszych odmian, i dajmy że os RS na fig. 9. przeniesła się na rs , przecinając pierwśzą w początku odcinków, i czyniąc z nią kąt PAs , który nazwiemy ϕ , a utrzymawszy ieszcze tę kondycyą że współ-ufzykowane są pionowemi, iakże wyrażemy tę nową odmianę? Przypatrzmy się uważą, że w tym stanie dawne współ-ufzykowane AP , PM , przemieniają się na $AQ(t)$, $QM(u)$, prowadzone od tegoż samego punktu M , pionowo do nowéy osi. Należy więc wyrazić x, y , przez funkcyą kąta ϕ , i przez té przybyśze lub uimki, któremi się powiększyła

leżyła lub zmniejszyła, która s współ-ufzykowanych AP , PM . Na ten koniec nazwiemy $Wst. \phi$, (m).
 Dost. ϕ , (n). a wzięwszy iedność za promień po-
 dług naszego zwyczaju; wypadnie $mm+nn=1$. Od
 P , pociągniemy pionową Pp równo-ległą QM , dru-
 gą Pq , równo-odległą rs . Będzie $Pp=AP.Wst.\phi=xm$;
 $Ap=x$. Dost. $\phi=xn$. A ponieważ kąt PAp = kątowi
 $PMq=\phi$; będzie $Pq=PM.Wst.\phi=ym$; $Mq=PM.Dost.$
 $\phi=yn$. Aże $AQ(t)=Ap-Pq=nx-ym$; $QM(u)=Mq$
 $+Qq=Mq+Pp=yn+xm$; przeto mamy: $t=nx-ym$;
 $u=yn+xm$. A s tąd $nt+mu=x$, - - - $nu-mt=y$.
 Włożywszy więc w podane zrównanie za x , ($nt+mu$);
 a za y , ($nu-mt$), przerobiemy ie na inné do osi rs .
 Jeżeli rs przeniesie się nad RS , na ten czas kąt ϕ ,
 będzie odmiennym, a zatem i jego wstawa.

Chcąc ieszcze ogólniey rzecz uważać, dajmy że os
 RS przemienia się na rs iako nám fig. 10. pokazuje,
 i że z osią początek odcinków przenosi się na D ,
 chcąc té nowé kondycye wciągnąć w zrównanie; od
 D ciągnę linią DL równo-ległą osi RS , a pytanie na-
 źe zamknie poprzedzające odmiany, to jest: że w
 poprzedzającym działaniu x powiększy się wielko-
 ścią $AD(f)$, a y wielkością $OP(g)$, przeto włoży-
 wszy w poprzedzający wynalazek za x , $x+f$; a za
 y , $y+g$, wynaydziemy $u=yn+gn+xm+mf$ - -
 $t=xn+nf-ym-gm$, a s tąd wyciągniemy $x=nt+$
 $mu-f$; - - $y=nu-mt-g$, które wartości włoży-
 wszy w podane iakie zrównanie, przerobiemy ie na
 inné, którego os będzie się nachylać do pierwizéy ką-
 tem ϕ ; i w którym iak przystawy tak odcinki będą
 innéy wielkości, to iednak zrównanie nie w naturze
 linii nie odmiéni. Wnieśmy sobie łatwo, że takowé
 linii wyrażenie jest barzo ogólne, przypuściwszy
 współ-ufzykowane pionowé, ponieważ ono zamyka
 w sobie wizytkie inné, iako lekká uwaga každého
 o tém przekoná. Powtóre że takowé zrównania, s

Zebrańie wfszy
 stkich poprze-
 dzających od-
 mian.

fig. 10.

B

których

których jedno przerabia się na drugie, wyrażają tę samą linią lubo pod inną postacią.

Współ-ufzykowane pionowe odmiennia się na ukośne,

Fig. 8.

Ale jeszcze chcąc uwagi nazfe do náyogólniejszych przywiesdź początków, odmiennmy nawet i tę kondycyą że współ-ufzykowane są pionowemi, i wystawmy sobie, że one się nachylaia do siebie kątem ψ , s tym warunkiem, że ten kąt jest ieden dla wszystkich.

Dla iasniejszego poięcia rzucmy okiem na fig. 8. i zadaymy sobie do wynalezienia związek między AL i LM , naklonionemi kątem ALM (ψ), zamiast AP i PM pionowych. W tym przypadku $AL=t$, - -

$$LM=u=\frac{y}{W\beta.\psi}, PL=\frac{y.Dof.\psi}{W\beta.\psi}=u.Dof.\psi; \text{ a nazwá-}$$

wszy $W\beta.\psi$ (p); $Dof.\psi$ (q); będzie $u=\frac{y}{p}$; - -

$t=x+uq$; zaczem $y=pu$; $x=t-ug$; wlozywşy te wartości na miéysce x, y , w podane zrównanie, przerobiemy ie na inne, które wyrażać będzie naturę linii krzywéy, przez współ-ufzykowane naklonione do siebie kątem ψ . I przeciwnie; mając zrównanie między t, u , współ-ufzykowanemi naklonionemi do siebie kątem ψ , wlozywşy na miéysce $t, (x+\frac{yq}{p})$, a na

miéysce $u, (\frac{y}{p})$; przerobiemy ie na inne między x, y , współ-ufzykowanemi pionowo; zostawiwşy tę samę oś i ten sam odcinków początek.

z wszystkich poprzedzających odmiannyciąg się zrównanie náyogólniejsze na linie.

Fig. 10.

Na koniec odmiennmy ielzce to wszystko, i wziawşy na fig. 10. za początek odcinków D ; oś iakąkolwiek RS ; dwie współ-ufzykowane $DT(r)$, $TM(z)$ pochyłe kątem $DTM(\psi)$; szukaymy wartości x, y , w funkcyach dwóch kątów i nowych przybyşów. Na ten koniec od D do osi RS , wynolę linią pionową DG , którą nazywám g ; $AG(f)$. Od D wiodę linią DL równo-odległą RS ; kąt QDL nazywám ϕ ; iego

Wstawę

Wstawę (m), Dostawę (n), Wst. ψ , (a); Dost. ψ , (b).
Od M do nowéj osi spuszczaám pionową $MQ(u)$,
 $DQ(t)$. Mamy s poprzedzających wynalazków
 $x=nt+mu-f$, $y=nu-mt-g$, teraz zaś $QT=\frac{ub}{a}$,

$$TM(z)=\frac{u}{a}; DT(r)=DQ+QT=t+\frac{ub}{a}=t+bz. \text{ Więc}$$

$t=r-bz$ - $u=az$. Włożywszy té wartości na t, u ,
w zrównania wyżej wyrażone na x, y , wypadá:
 $x=nr-(nb-ma)z-f$, $y=-mr+(na+mb)z-g$;
gdzie $nb-ma=Dost.AVM$, $na+mb=Wst.AVM$; wło-
żywszy więc za x, y , té ich wartości w zrównanie po-
dane, przerobiemy je na zrównanie náygólniejsze li-
nii krzywey, ponieważ to nie jest przywiązane do
żadnego szczególnego warunku, ale je wszystkie w
sobie zawiera.

Té same sposoby służą nám do náygólniejszego
zrównania linii prostej. Niech będą dwie linie pro-
ste równo-ległe na figurze 11. RS, MN , wszystkie
przystawy PM , będą sobie równe, a zatem zrównanie
 $y=c$: chcąc je przerobić na zrównanie ogólne do osi
 rs , mám s poprzedzających wynalazków $y=nu-$
 $mt-g$, czyli $nu-mt-g-c=0$. A chcąc ielzce współ-
użytkowane mieć ukośne, kładę za $t, r-zb$, za u ,
 az , i wypadá $(na+mb)z-mr-g-c=0$, a rozmno-
żywszy je przez ilość stateczną k dla tym ogólniey-
szego wyrazu, i nazwawszy $kna+kmb=a'$, $-mk=b'$,
 $-k(g+c)=c'$, otrzymám:

$$a'z+b'r+c'=0.$$

Zrównanie náygólniejsze na linią prostą, które je
jest i go stopnia, idzie za tém, że wszystkie zrównania
i go stopnia oznaczają linią prostą.

Weźmy za drugi przykład koło jako linią krzy-
wa wiadomą z geometrii początkowej, a chcąc wy-
leśdź punkt M , fig. 12. szukámy związku między
 $AP=x$, i $PM=y$. Tén związek poddać nám Geo-
metrya Euklidesa, która nás uczy że PM jest średnią

Bz

propor.

Fig. 11.

Fig. 12.

proporcjonalną między AP i PB ; nazwiemy $AB=g$, będzie $PB=g-x$, a przeto:

$AP:PM::PM:PB$ to jest: $x:y:y:g-x$ skąd wypada równanie na koło:

$$y^2=gx-x^2 \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

chcemy naprzód poznać, czyli równanie $y^2=a^2-x^2$ wyraża także naturę koła: przeniesmy początek odcinków z A do środka C , tak że CP będzie odcinkiem, który nazwiemy z , PM przystawą y ; ponieważ $CP=CA-AP=\frac{1}{2}g-x=z$, będzie więc $x=\frac{1}{2}g-z$ włożywszy tę wartość w (a) przerobiemy to równanie na $y^2=\frac{1}{4}g^2-z^2$, które jest takim iak - -

$y^2=a^2-x^2$ gdzie $a=\frac{1}{2}g$; więc równanie $y^2=a^2-x^2$ jest także równaniem na koło, w którym a jest promieniem, a początek odcinków wzięty w środku C . Trudność więc nasza już się dostatecznie ułatwiła. Mając kilka równań, a chcąc się przekonać, czyli te wszystkie iedną linią krzywą wyrażają, biorę za x, y , wartości wyciągnięte s poprzedzających odmian, za pomocą których otrzymam równania pod wielu postaciami; potem nąypodobnieysze między sobą równam co do każdego terminu, a stąd wypadną mi równania szczególne na oznaczenie ilości f, g, m, n , i t. d. flużące; jeżeli tylé ich otrzymam ile mam nieoznaczonych ilości, i jeżeli nowe wspóluszkiowane są w tymże stopniu co i dawne; pewnie jestem, że równania moje należą do téj samey linii krzywéy: s tą różnicą że w nich zachodzą odmiany odpowiadające wartościom wziętym za x, y .

§. IV.

S poprzedzających odmian wyciąga się istotny charakter równań służyący za grunt do podziału linii na różné klasy.

Nauczyliśmy się już, że równanie na iakąkolwiek linią może się zamiénic w niezliczone postaci, które nie odmieniają w naturze samey linii: ale ieszcze nie znamy pewnego charakteru, któryby nam za pierwszém rzuceniem oka dał się przekonać, że równania należą do różnych linii. Łącząc początki geometryczne s początkami myślenia, powinniśmy się zaraz

zaraz domyślić, że takowego charakteru należy nam upatrować w naturze funkcji jako jedynem rzodzie naszych dociekań. Powtóre: że ten charakter tak istotny powinien być zostać nienaruszonym przechodząc przez wszystkie odmiany, które dopuścić może iakiekolwiek zrównanie; jeżeli natura linii w tych wszystkich różnościach jest zupełnie ocaloną. Oświeceni temi dwiema prawdami, wróćmy się uwagą do działań § poprzedzającego, a tam wpadnie nam zaraz w oczy, że przerabiając na różne postaci różne zrównania, otrzymaliśmy w tych wszystkich przemianach zawsze tenże sam stopień między współ-ufzykowaniami, tak dalece: że każde zrównanie przebrane w inną postać, ani się przez to zniżyło, ani podniosło do wyższego stopnia. S kąd mamy prawo upewnić się, że stopień zrównań jest istotną cechą oddzielającą je jedne od drugich, tak dalece; że zrównania różnego stopnia, należą koniecznie do różnych linii krzywych. Ten náy pewnością charakter obie-ramy sobie z J. P. Eulerem za zasadę kląs, na które linie dzielić będziemy. Podziały takowe nazwiemy PORZĄDKAMI (Ordines). Do pierwszego porządku należyć będą wszystkie linie oznaczone zrównaniem 1go stopnia między dwiema współ-ufzykowaniami x, y ; iakiem jest zrównanie ogólne:

$$a+bx+cy=0:$$

które wiemy, że należy do linii prostej: a zatem linia prosta zamknięta będzie w pierwszym porządku, o której nauka należy do geometrii początkowej, a przeto od terażniejszego naszego zamiaru daleką.

W drugim porządku będą linie zamknięte w zrównaniu náyogólniejszym 2go stopnia między x, y ; iakiem jest:

$$a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2=0.$$

do którego należą sławne linie krzywe pod imieniem UCINKÓW OSTRO-KRĄGOWYCH (Sectiones Conicae).

Trzeci porządek zamknie wszystkie linie oznaczone zrównaniem náyogólniejszym 3go stopnia między x, y .

B₃

$$a+bx$$

$$a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2+gx^3+hx^2y+ixy^2+ky^3=0;$$

W czwartym porządku umieścimy linie zawarte w równaniu nąyogólniejszém 4go stopnia.

$$a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2+gx^3+hx^2y+ixy^2+ky^3+lx^4+mx^3y+nx^2y^2+pxy^3+qy^4=0.$$

Idąc tym sposobem do wyższych porządków, potrzeba nam na każdy z nich podać równanie zamykające naprzód x, y , w potęgze temu porządkowi właściwey: powtórę wszystkie kombinacye między x, y , w tymże stopniu, i wszystkich innych które go poprzedzają. A co na jedno wynidzie, że każdy porządek powinien zamykać w swém równaniu całe równanie porządku poprzedzającego, i oprócz tego terminy ze wszystkimi które tylko powstać mogą mnogościami x, y , składającemi potęgę porządku danego: tak n. p. równanie na porządek piąty, zamykać powinno całe równanie porządku czwartego, i oprócz tego terminy z mnogościami.

$$y^5, x^5, y^4x, x^4y, y^3x^2, x^3y^2.$$

każda z tych mnogości iak widzemy czyni potęgę piątą. Takowych przybyzowych terminów do równania porządku poprzedzającego, liczba jest $n+1$; gdzie n znaczy wykładnika porządku podanego. Przeto liczba terminów wchodzących w równanie na iakikolwiek porządek n , wyrazić się może przez liczbę terminów porządków poprzedzających. Takowy wyraz zamyka szereg postępu arytmetycznego.

$$(n+1)+n+(n-1)+(n-2)+(n-3)+(n-4)+(n-5)+\dots+(n-6) \text{ i t. d.}$$

Zbiór więc czyli summa tego szeregu da nam liczbę terminów wchodzących w równanie na linie porządku n . Tę summę wynaydziemy łatwo za pomocą równań (A), (B), w §. 47. Algebry, uczyniwszy $a=n+1, u=0, b=-1$. a równanie naprzód (A) da nam liczbę terminów w szeregu, czyli

$$x = \frac{-(n+2)}{-1} = n+2, \text{ s czego za pomocą równania}$$

(B)

(B) znaydziemy summe $s = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Zrównanie więc na linie porządku n , zamykać powinno terminów $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Łatwo sobie każdy bez ostrzeżenia wniesie, że chcąc śladzić o stopniu zrównania, a zatem o porządku linii, którą wyraża, należy ię wprzód oswoodzić od znaku pierwiastkowego, jeżeli iaki zamyka, n.p. $y^2 = \sqrt{ax+x^2}$: zdaie się bydz drugiego porządku; w rzeczy atoli samy wyrzuciwszy znak pierwiastkowy, iest czwartego: $y^4 = ax+x^2$.

§. V.

Zastanowiwszy się nad stopniami zrównań, wpadnie podobno nie ieden z nas na tę myśl, że zrównanie iakiegokolwiek stopnia może się składać z zrównań stopni niższych iako swych mnożników, na które w takim przypadku można ię rozebrać. Znalazwszy takowych mnożników iedno-kształtnych, każdy z nich oznaczać będzie linią tego porządku, do którego należy. Złożywszy ich więc znowu w iedno zrównanie, możeż s takiego składu powstać nowa linia ciągła wyższego porządku? Teorya generalna zrównań w pierwfzey Części Algebry wyłożona i dobrze rozumem objęta, uczy nas, że to bydz nie może: że jeżeli zrównanie iakiegokolwiek stopnia powstało z mnożenia zrównań niższych stopni, nie rodzi się stąd żadna nowa linia, ale to zrównanie iest składem wszystkich linii, wyrażonych przez niższe zrównanie, s których tamto powstało: tak n.p. zrównanie 3go stopnia jeżeli powstało z mnożenia zrównania 2go stopnia przez zrównanie 1go, i jeżeli pierwiastki w pierwfzem nie są uroione; każdej wartości x , będą odpowiadać trzy przystawy, s których dwie będą należyć do linii 2go porządku, a trzecia do linii pierwfzego. Jeżeli zaś powstało z mnożenia trzech zrównań 1go stopnia; wszystkie trzy przysta-

Przeſtrogi na zrównanie złożone, wynika iace z mnożenia zrównań niższych stopni.

wy należyć będą do linii prostych. S tąd wypadają dwa wnioski barzo oczywiste: Naprzód: że każde zrównanie wyrażające linią jedną ciągłą pewnego porządku, nie powinno być różbieralne na żadne mnożniki jedno-kształtne wymierne, któreby składać mogły zrównania osobne na linie innych porządków. Powtóre: jeżeli które zrównanie może się rozebrać na takowych mnożników; nie wyraża linii tego porządku, który jest przywiązany do ięgo stopnia; ale jest składem tych wszystkich linii niższych stopni, które pokazują ięgo mnożniki, i dla tegoć to taki gatunek zrównań nazywa się SKŁADANYM (*Aequationes complexae*). Dorozumiewa się każdy, że tylko pierwszy rodzaj zrównań należyć może do naszego zamiaru. Nie potrzeba nam się zastanawiać nad różnemi kombinacyami zrównań niższych stopni, s których powstać może iakiękolwiek zrównanie składane; wiemy bowiem że n.p. zrównanie 4go stopnia, może powstać albo z dwóch zrównań 2go stopnia, albo z zrównania 3go, przez zrównanie 1go stopnia, albo szczerch zrównań 1go i t.d. każdę s tych kombinacyi odpowiada inny zbiór linii.

§. VI.

Wykładaia się własności ogólne Linii każdego porządku.

Mając w pamięci początki wytkómaczone w §. 2. wiemy dostatecznie, że náyistotniejszyą własnością każdę linii krzywę iakięgokolwiek porządku jest przecinanie ię od linii próstę; liczba takowych przecięć uczyłaby nas zawsze o stopniu zrównania wyrażającego tę linią; gdyby wszystkie ię, pierwiastki były rzetelne, co do ilości odmiennę náywyższego wymiaru. W tém bowiem przypuszczeniu zawszeby przystawa przecinała raz linią 1go, dwa razy linią 2go, trzy razy linią 3go, n razy linią n go porządku. Ale że w zrównania wchodzieć mogą w liczbie parzystę pierwiastki uroione, przeto liczba przecięć nie uczy nas więcę, iak tylko, że linia nie może być niższego porządku nad tén, który wyraża liczba przecięć; ale czy nie jest wyższego porządku

porządku nie nas nie uczy. Wiedząc n.p. że linia iaka może być w dwóch miejscach przecięta od prostej; pewni jesteśmy, że ona nie może należeć do 1go porządku; ale może należeć do któregośkolwiek z wyższych. Stąd jeszcze i to wniesć możemy, że linia iakiegokolwiek porządku n , nie może być więcej nad n razy przecięta od linii prostej. Liczba takowych przecięć zmniejszyć się może albo dla pierwiastków urojonych, albo dla terminów brakujących w równaniu. Jeżeli równanie podane zamyka terminy najwyższego wymiaru co do każdej z osobna ilości odmiennych, w linii takowem równaniem opisaney nie może braknąć liczba przecięć tylko parzystą: bo ten niedostatek wypada z pierwiastków urojonych, które się nie mogą znajdować tylko w liczbie parzystej. Ale jeżeli w równaniu na linię krzywą braknie terminów najwyższego wymiaru iednej ilości odmiennych, liczba przecięć w takowej linii może braknąć parzystą lub nie parzystą, i tak n.p. dwa równania $y^2 + ny + bx^2 + cx^3 + d = 0$. - - $y + ax^3 + dx^2 + e = 0$. wyrażają dwie linie 3go porządku, z których pierwszą dwa razy tylko być może przecięta od y , a trzy razy, lub raz od x . Drugą zaś, raz tylko być może przecięta od przystawy y , a trzy razy lub raz od osi; w obydwóch liczba przecięć od x , nie może braknąć tylko parzystą; ale liczba przecięć od y , w pierwszej nieparzystą, a w drugiej parzystą braknie.

Liczbę przecięć linii każdego porządku od linii prostej, wyciągnąć możemy z iey równania, położwszy $y=0$; tym bowiem sposobem otrzymamy równanie tegoż samego stopnia na x ; którego pierwiastki jeżeli będą wszystkie rzetelne, odkryją nam miejsca, w których linia przecina oś: jeżeli zaś będzie zamykać niektóre pierwiastki urojone, liczba przecięć tyle będzie mniejszą, ile jest pierwiastków urojonych. Ze zaś oś jest linią prostą, której położenie jest arbitralne; kładąc $y=0$ w równanie,

Bj

prowa-

prówadźemy oś przez te wszystkie miejsca, w których linia krzywa być może przecięta od prostej.

Zostaie nam teraz rozstrząsnąć ilości stateczne, które wchodzą w współ-czynniki równań iakiegokolwiek stopnia. Wyróżaią one pewne miejsca przywiązane do ich wartości szczególnych, przez które linia krzywa ma przechodzić; §. bowiem 3: oświecił nas, że różne wartości ilości statecznych odmiieniaią wielkość i położenie współ-ufzykowanych, a zatem przenoszą punkta linii krzywych z iednego miejsca na drugie, zostawiwszy ie tylko przy tym samym związku który ieft istotny. Chcąc więc linią iakiegokolwiek porządku przez pewne iakie miejsca prowadzić, i do pewney iakięj osi sfosować, należy w zrównaniu współ-czynnikom statecznym nieoznaczonym a, b, c , i t.d. pewne nadadź wartości przywiązane do tych miejsc przez które ma linia przechodzić. Ze zaś zrównanie na linią porządku n , zamykła $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ terminów, a zatem tylęż współ-czynni-

ków nieoznaczonych; nadawszy pewne wartości terminom $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$, ostatni iuż przez

to samo staie się oznaczonem dla związku koniecznego s pierwfzemi zawartego w zrównaniu. Tak n.p. linia prosta ma trzech współ-czynników nieoznaczonych, s których nadawszy dwóm pewną iaką wartość, trzeci iuż przez to samo weźmie oznaczenie wypadaiące z związku, który między niemi zachodzi. Te dwie wartości, naznaczą dwa punkta, przez które linia ma przechodzić; przeto do oznaczenia pewney linii prostej potrzeba koniecznie dwóch punktów; prawda, którey nas geometryą początkową naucza. Nie maiąc tylko ieden punkt, czyli iednego tylko współ-czynnika oznaczonego, linia zostaiie nieoznaczoną; to ieft: że przez ten punkt nie skończona liczba linii być może prowadzonych.
Zrównanie

Zrównanie na linii 2go porządku potrzebuje pięciu pewnych wartości, czyli do oznaczenia pewnej linii 2go porządku trzeba koniecznie pięć punktów, przez które jedna tylko a nie insza linia 2go porządku może przechodzić; mając ich mniej, linia będzie nieoznaczona, i przez te punkta nieskończoną liczbą linii 2go porządku może być prowadzona. Chcąc linią 3go porządku tak oznaczyć, aby ona przechodziła przez pewne miejsca, żadna inna przez te same miejsca nie mogła przechodzić, potrzeba do tego 9. punktów; mając ich mniej, przez nie, nieskończoną liczbą linii 3go porządku może być prowadzona. Toż samo mówić o innych porządkach. W znaczeniu atoli wszystkich punktów, to jest szczególnego, że zrównania odkrywające wartości pewne na współczynniki a, b, c , i t.d. wszystkie są 1go stopnia. A zatem żaden punkt, gdziekolwiek go obierzemy, nie może wypadnąć niepodobnie. Jeżeli atoli więcej punktów leżeć będzie w proste, niżeli być może przecięć w linii pewnego porządku, na ten czas wpadniemy na zrównanie złożone; tak n. p. gdyby w zrównaniu 2go stopnia 3. punkta były wprost; ponieważ linia 2go porządku nie może być w trzech miejscach przecięta od prostej; zrównanie nasze zamieni się na zrównanie złożone z dwóch linii prostych,

§. VII.

Uwagać tylko linią krzywą jako mogącą przechodzić przez różne miejsca, jest to jedno co uważać dwie współużytkowane co do różnej wielkości, i co do różnego względem siebie położenia; między którymi jednak zachodzący stosunek, i całkiem zawisły od związku ilości w zrównaniu zawartych stała. ten sam; jeżeli zrównanie jest co do związku ilości nieodmienné. Takową uwagę różnych położzeń jednej linii krzywej ciągnie za sobą odmianę ilości statecznych, to jest: że chcąc w różnych położeniach linią krzywą uważać, musimy ilości state-

Podobieństwo
linii krzy-
wych.

czne odmiieniać: jeżeli te ilości odmiieniają się przez nadanie im co raz różney wartości; linią krzywą s tąd wypadającą nie odmiieni swęgo porządku, ale może odmienić swóy gatunek z odmianą położenia: jeżeli zaś te ilości stateczne odmiieniają swoię wielkość dla tego tylko, że się odmienia iedność, czyli linią wziętą za miarę porównywania; linią krzywą w tym przypadku odmienia tylko swoię wielkość nie odmieniając gatunku. I dla tego kiedy zrównanie na linią krzywą zamykają iednę tylko ilość stateczną służącą za miarę różnych odmiian w współ-ufzykowanych, odmiieniając tę stateczną ilość, wypadają linie krzywe nie różniące się od siebie tylko położeniem i wielkością, które nazywać będziemy LINIAMI PODOBNEMI (*Curvae similes*), n. p. zrównanie na koło $y^2 = 2ax - x^2$, zamykają sam tylko promień a , który odmieniając, otrzymamy koła różnych promieni między sobą podobne. Zrównanie na linią krzywą 3go porządku $y^3 - 2x^3 + ay^2 - ay^2x + 2a^2y = 0$ -(G) mając także iednę tylko ilość stateczną, wyrażać będzie niekończoną liczbę linii między sobą podobnych odmiieniając w niem a . Do zrozumienia dokładniejszego tych podobnych linii wystawmy sobie że fig. 13, 14, wyrażają dwie linie krzywe między sobą podobne i zamknięte w zrównaniu (G), w których AB , CD , są ilościami statecznemi, a to iest, że

$$AB = a \text{ odmieniło się na } CD = \frac{a}{n}, \text{ nazwawszy } AP = x,$$

$$PM = y, \text{ będzie } CL = \frac{x}{n}, \text{ LN} = \frac{y}{n}, \text{ będzie więc}$$

$AP:CL = AB:CD = PM:LN$, to iest że będą się miały współ-ufzykowane w obydwóch tych liniach, iako się mają ich ilości stateczne AB , CD ; i wszystkie linie iakiekolwiek pod iednym kątem w obydwóch tych liniach prowadzone iako to n. p. MQ , MO , będą się miały iako $AB:CD$; ich zaś płaszczyzny iako potęgi drugie tychże ilości statecznych $AB^2:CD^2$.

W iednym

Fig. 13. 14.

W jednym więc zrównaniu uważać możemy nieskończoną liczbę takowych linii krzywych biorąc ilość stateczną za odmienną. Takową stateczną ilość służącą do porównywania odmian w spół-użytkowanych przybraną nazywać będziemy odtąd LINIĄ RÓWNIANIA (*Parameter*).

Tu już powinniśmy poznać drogę, której nam się trzymać należy w ciągu teraźniejszej nauki. Uważać namprzód będziemy zrównania różnych stopni w całej swej ogólności, i s tąd wyciągać właściwości powszechnie linii różnych porządków. Wprowadzając potem w te zrównania warunki szczególne, wypadną nam różne gatunki linii krzywych w tym porządku ogarnione. Te znowu szczególne zrównania osobno rostrząsane, odkryją nam właściwości każdemu gatunkowi szczególne.

ROZDZIAŁ DRUGI.

Z uwag ogólnych nad zrównaniem 2go stopnia między dwiema ilościami odmiennymi, wyciągają się właściwości LINII KRZYWYCH 2go PORZĄDKU: szczególne przypuszczenia w zrównanie wprowadzone, odkrywają nam szczególne gatunki linii krzywych 2go porządku i właściwości każdemu gatunkowi służące.

§. VIII.

Zrównanie náyogólniejsze 2go stopnia między dwiema odmiennymi ilościami x, y , nie mogąc się rozebrać na dwa proste 1go stopnia, a przeto zamykające w sobie wszystkie linie krzywe 2go porządku jest:

$$y^2 + \frac{ex+c}{f} y + \frac{dx^2+bx+a}{f} = 0 \quad (a)$$

które

właściwości
cięciw.

które uważać będziemy *naprzód* co do terminów znakomitych funkcją iaką pierwiastków; stófuiać ie zaś do linii krzywéy 2go porzadku, dostrzegać włośności z natury tych terminów wypadaiających, wprowadzać nakoniec będziemy odmiany w §. 3. wyliczone, i s tych nowe wydobywadź włośności. A iako natura linii krzywych poznaie się s pewnych stósfunków i związków dwóch linii prostych, tak włośności różné tychże linii krzywych zależyć będą równie na pewnych włośnościach linii prostych różnym sposobem prowadzonych do linii krzywych; co zawsze pokazuje drogę analityczną prowadzącą rozum od rzeczy znanych do nieznaných.

Przypuściwszy że fig. 15. wystawia nám linią krzywą 2go porzadku opisaną zrównaniem (α) . Dla ogólnego poznania włośności takowéy linii niech A będzie początkiem odcinków na osi AS ; kąt współużykowanych ukośny; $AP=x$, $PM=y$. Ponieważ współczynnik 2go terminu zrównania (α) iest sumą

piérwiastków; będzie $PM+PN=\frac{ex+c}{f}$

$\frac{eAP+c}{f}$; $P'M-P'N'=\frac{eAP'+c}{f}$, od tego ostatnie-

go zrównania odciagnawszy piérwsze; otrzymamy $\frac{NQ+RM}{PP'}=\frac{e}{f}$. Stófuiać podobnie tó działanie do

fig. 16, gdzie przystawy padata z obydwóch stron osi, znajdziemy $\frac{MR-NQ}{PP'}=\frac{e}{f}$ to iest: że w każdéy

linii 2go porzadku poprowadziwszy dwie cięciwy sobie równoległe, i od dwóch punktów linii krzywéy leżących na iednéy cięciwie, pociagnawszy linie równoległe osi, Summa albo różnica odległości spacznych dwóch punktów linii krzywéy na drugiéy cięciwie leżących, od tych równoległych osi; má się do odcinku osi między cięciwami zawartého w stósfunku zawsze

zawsze nieodmiennym: suma, kiedy cięciwy nie padaia obydwie z obydwóch stron osi, różnica zaś, gdy obydwie cięciwy znajdują się z obydwóch stron osi. Dajmy teraz że cięciwa stanie się styczną linii krzywéy w miejscu C; punkta M, N zniyda się razem u C, i będzie znowu $\frac{CK - CI}{CP} = \frac{e}{f}$; $\frac{CK' - CI'}{CP'}$

Pierwsza własność wyciągnięta z 2go terminu zrównania.

$= \frac{e}{f}$, a przeto $(CK - CI)CP' = (CK' - CI')CP$: jeżeli

więc uczyniemy $CK - CI = 0$, czyli $CK = CI$, będzie koniecznie, $CK' = CI'$, to jest: jeżeli od styczney prowadzoną linią prostą dzieli cięciwę równoległą styczney na dwie części równe; ta sama linia dzielić będzie wszystkie inne cięciwy równoległe pierwszey na dwie części równe: linia taką dzielącą wszystkie cięciwy między sobą równoległe na dwie części równe, nazywają się ŚRZEDNICĄ linii drugiego porządku (Diameter). Linia więc prosta równoległa cięciwom na dwie części równe od średnicy przeciętym, prowadzoną przez punkt linii krzywéy na średnicy leżący, jest zawsze styczną linii krzywéy. S. tę własności wypada nam barzo prosty sposob prowadzenia stycznych i średnic do jakiegokolwiek punktu linii 2go porządku. Niech będzie n.p. punkt dany E na linii krzywéy, do którego prowadzić mi potrzeba styczną; narysowawszy cięciwę VL, dzielę ją na dwie części równe $FV = FL$, przez dwa punkta E, F, prowadzoną linią prostą będzie średnicą, a przez punkt E pociągniętą linią równoległą cięciwie VL będzie styczną linii 2go porządku. Ta iestżce własność przekonywá nas, że wziawszy w linii 2go porządku średnicę za oś, przytawy na nię postawione będąc między sobą równe, z nich zaś jedna dodatną, drugą odiemną; zbiór takowych przytaw będzie zero, a przeto w zrównaniu na linie 2go porządku ile razy średnica iest osią, współ-czynnik 2go terminu a z nim termin zamykający y zniknie: i przeci-

i przeciwnie ile razy zrównanie na linii 2go porządku nie ma drugiego terminu; w linii tej średnica jest wzięta za oś, cośmy już widzieli w kole pod §. 3.

Weźmy teraz trzeci do rostrząsania termin w zrównaniu (a) tén będąc zawsze mnogością z dwóch pierwiastków; uczy nas, że na fig: 15. $PM.PN = \frac{dx^2+bx+a}{f}$

Fig. 15.

Drugi członek tego zrównania może

się składać albo z dwóch pierwiastków rzetelnych, albo z dwóch urojonych; pierwszy przypadek ma miejsce kiedy oś przecina linią krzywą w dwóch miejscach; iakie są F, G ; w tych bowiem miejscach $y=0$, a zatem $\frac{dx^2+bx+a}{f}=0$, zrównania tego pier-

wiastki są AF, AG ; a przeto $\frac{dx^2+bx+a}{f} = \frac{d}{f}(x-AF)$

$(x-AG) = \frac{d}{f}PF.PG$, skąd wypada znowu $\frac{PM.PN}{PF.PG}$

$= \frac{d}{f}$ stosunek nieodmienny w każdej linii 2go po-

rzędu. Aże również $\frac{P'M'.P'N'}{P'F.P'G} = \frac{d}{f}$, więc

$$PM.PN:PF.PG = P'M'.P'N':P'F.P'G$$

będzie więc na fig: 17. gdzie PD jest osią iaką dopiero była PG, OQ zaś iey równoległą, będzie mówię:

Fig. 17.

$$OT.TQ:TM.TN = GC.GD:GI.GH = FI.FH:FO.FQ,$$

to jest: że w każdej linii, drugiego porządku dwie cięciwy przecinające się, czynią stosunek nieodmienny mnogości z dwóch odcinków, do mnogości z drugich dwóch odcinków.

Drugą własność cięciw wydobytą z ostatniego terminu zrównania.

Wystawmy sobie teraz że PM przeniosło się na PR , i punkta M, N , szzedłszy się razem uczyniły $PM=PN=PR$, z dopiero dowiedzioney własności wypada że

$$PR^2:PC.PD = \frac{d}{f}; SR^2:SL.SK = \frac{d}{f}, \text{ a zatem } PR^2:$$

$$PR^2:PC.PD=SR^2:SL.SK.$$

Przeciąwśmy dwie linie równo-ległe fobie PD, i SK, w miejscach X, Z tak, żeby PX było średnią proporcjonalną między PC, i PD; SZ średnią proporcjonalną między SL i SK; podług tego warunku $PX^2=PC.PD$; $SZ^2=SL.SK$, a przeto

$$PR^2:PX^2=SR^2:SZ^2, \text{ czyli } PR:PX=SR:SZ$$

punkta więc X, i Z znajdują się na jednej linii RZ: co nam odkrywa nową własność, to jest: jeżeli linia od punktu dotknięcia R tak przetnie którąś cięciwą, że PX będzie średnią proporcjonalną między PC i PD; wszystkie inne cięciwy równo-ległe pierwszym będą podobnie przecięte: znowu jeżeli PX, SZ będą średnie proporcjonalne między PC, PD; SL, SK; linią przez dwa te miejsca X, Z, przechodzącą przejdzie koniecznie przez punkt dotknięcia R.

Wróćmy się teraz do drugiej własności cięciw, a stosując ją na fig. 16, do dwóch cięciw NM, CP, s których ostatnia będąc średnicą, czyni $PM=PN$; będzie

$$PM^2:CP.PD=P'M'^2:P'C.P'D=\frac{e}{f} \text{ nazwawszy}$$

CD wziętą za oś, m ; $CP=x$, $PM=y$; będzie

$$PD=m-x; \dots y^2=\frac{e}{f}(mx-x^2) \dots (\beta)$$

nowe zrównanie na linie 2go porządku, w którym średnica jest osią, a punkt C początkiem odcinków.

Obierzmy sobie teraz na fig. 18. cztery punkta, A, B, C, D, tak żeby cięciwy AB, CD, były równo-ległe, złączymy je s sobą, otrzymamy trapez ABCD. Weźmy do tego punkt piąty M, i przez ten prowadźmy cięciwę MN równo-ległą pierwszym. Wiemy z geometryi początkowej, że gdyby średnica linii krzywey przecięła dwa boki trapezu AB, CD, na dwie części równe; będzie także podobnie przecinać im równo-legły PQ: powtóre też średnica będzie także przecinać MN na dwie części równe, zaczęm $MP=QN$, to jest: mając pięć punktów znanych w

C

linii

Fig. 16.

Fig. 18.

linii 2go porządku, mamy zaraz wiadomy szósty. Prawda którąśmy już wyżej s kąd inąd poznali.

Drugą własność cięciw uczy nas: że $MP \cdot MQ$ do $BQ \cdot QD$ jest w stosunku nieodmiennym: poprowadzimy więc przez punkt M , RS równoległą BD , będzie $MR=BQ$, $MS=QD$, a przeto $MP \cdot MQ:MR \cdot MS$ stosunek nieodmienny na punkta przecięć P, Q, R, S , między równoległymi AB, MN, BD, RS . Obierzmy jeszcze gdziekolwiek punkt O , a łącząc go s punktami A, B, D , otrzymamy trapez $ABDO$. Przez ten punkt poprowadzoną GH równoległą AB daie:

$$MP \cdot MQ:MR \cdot MS=OG \cdot OH:BH \cdot HD$$

S troykatów zaś podobnych APL, AGO, STD, DOH , i z własności trapezu $ABGH$ mamy następujące proporcye:

$$AP:AG=PL:GO.$$

$$AP:AG=BQ:BH \text{ z nich wypada } PL:BQ=GO:BH.$$

$$MQ \text{ czyli } DS:ST=OH:DH.$$

$$\text{Przeto: } PL \cdot MQ:ST \cdot BQ=GO \cdot OH:BH \cdot HD.$$

$$PL \cdot MQ:ST \cdot BQ=MP \cdot QM:MR \cdot MS.$$

$$(MP+PL)MQ:(MS+ST)MR=PM \cdot MQ:MR \cdot MS.$$

$$\text{ponieważ } MR=BQ, \text{ } ML \cdot MQ:MT \cdot BQ=PM \cdot MQ:MR \cdot MS$$

$$\text{czyli } ML:MT=PM:MS.$$

Jakimkolwiek więc sposobem odauteniać się będzie punkt O , byleby punkt M był stały, i MQ, RS równoległymi cięciwom AB, BD , będzie $ML:MT$ stosunkiem nieodmiennym.

§. IX.

Własności cięciw przyprowadziły nas w §. poprzedzającym do poznania średnic w liniach 2go porządku. Użyjmy teraz tych pierwszych o średnicach wiadomości naprzód do wyznawdowania zrównań oznaczających położenie i wielkość średnicy jakiegokolwiek: powtóre do odkrycia ich własności zawikłayszych. Niech będzie na fig. 19. GI średnica linii 2go porządku, wziawszy AH za os będzie

Fig. 19.

$$LM=LN, \text{ a zatem } PL=\frac{PM+PN}{2}=\frac{ex-c}{2f}=\frac{2AP-c}{2f}$$

$\frac{-eAP-c}{2f}$, nazwawszy $PL=z$, równanie między $AP=x$, i $PL=z$, będzie równaniem na średnicę GI , to jest:

$$2fz+ex+c=0 \quad (A).$$

chcąc teraz oznaczyć wielkość GI , potrzeba nam wyrazić tę linię przez funkcją samych ilości znanych wchodzących w równanie (α) ; ponieważ zaś $GI^2=KH^2+(GK-HI)^2$, starać nam się potrzeba drugi ten człon przez ilości stałe zrównania (α) wyrazić. Na ten koniec stosując zrównanie (A) do punktów G, I , będzie $GK=\frac{-eAK-c}{2f}$,

$$HI=\frac{-eAH-c}{2f}, \quad GK-HI=\frac{e(AH-AK)}{2f}=\frac{eKH}{2f},$$

a przeto $GI^2=\frac{e^2+4f^2}{4f^2}KH^2$. Nie zostało nam już

tylko wyrazić KH przez same ilości stałe. Aże KH jest odcinkiem osi AH , czyli pewną funkcją x ; łatwo się przekonać że punkta K i H nie mogą być odkryte tylko za pomocą zrównania na oś: potrzeba nam zrównanie (α) przerobić na zrównanie oznaczające oś, a dopiero pierwiastki jego dadzą punkta, K , i H , a zatem i wartość szukaną KH . Ta uwaga prowadzi nas do rachunku następującego: $PM+PN=\frac{-ex-c}{f}$, $PM \cdot PN=\frac{dx^2+bx+a}{f}$, $(PM-PN)^2=(PM+PN)^2$

$$-4PM \cdot PN=\frac{(e^2-4df)x^2+2(ce-2bf)x+c^2-4af}{f^2}.$$

Przy punktach G, I , $PM=PN$; drugi więc człon naszego zrównania stał się zero, i razem zrównaniem na AH , to jest:

$$x^2+\frac{2(ce-2bf)}{e^2-4df}x+\frac{c^2-4af}{e^2-4df}=0,$$

pierwiastki dwa tego zrównania są linie AK, AH , a przeto C_2 $AK+$

$$\begin{aligned}
 AK+AH &= \frac{4bf-2ce}{e^2-4df}; \quad AK \cdot AH = \frac{c^2-4df}{e^2-4df}; \quad (AH-AK)^2 \\
 &= (AH+AK)^2 - 4AH \cdot AK \\
 &= \frac{4(2bf-ce)^2 - 4(e^2-4df)(c^2-4df)}{(e^2-4df)^2} = KH^2 \text{ co zu-}
 \end{aligned}$$

pełnie rozwiązuje nasze zadanie. Zebyśmy je jeszcze ogólniej rościagnęli; odmiennmy współ-ufzykowane pionowe na ukośne, $P'M, P'N', AP'$; nazwiemy kąta $PP'M$ wstawę g , dostawę h ; $AP'=t$, $P'M=u$,

otrzymamy za pomocą trygonometrii $u = \frac{y}{g}$,

$$P'P = uh = \frac{yh}{g}, \quad t = x - uh, \text{ czyli } y = ug, \quad x = t + uh,$$

włożywszy te wartości za x, y , w równanie (a) zamieniemy je na

$$u^2 + \frac{egt+cg+2dht+hb}{fg^2+egh+dh^2}u + \frac{dt^2+bt+a}{fg^2+egh+dh^2} = 0 \quad (B).$$

dwa pierwiastki tego równania są $P'M, P'N'$, które znowu nową średnicą EF przecinają na dwie części równe. Równanie oznaczające tę średnicę podobnie iak i pierwszą jest:

$$P'L' = \frac{P'M+P'N'}{2} = \frac{egt+cg+2dht+hb}{2(fg^2+egh+dh^2)}, \text{ czyli nazwawszy } P'L' = w \quad (C).$$

chcąc nową tę średnicę przywieść do współ-ufzykowanych pionowych iakie były na GI w równaniu (A), spuściam od L' pionową $L'Q=q$, $AQ=p$, będzie

$$w = \frac{q}{g}, \quad P'Q = \frac{qh}{g}, \quad t = p - \frac{qh}{g}, \text{ włożywszy za } w,$$

i, dopiero wynalezioné wartości w funkcji p, q , otrzymamy:

$$(2fg+eh)q + (eg+2dh)p + cg + bh = 0 \quad (D).$$

Równanie (D), oznaczá położenie średnicy EF ,
która

którą średnicę GI przecina w punkcie C . Punkt ten przecięcia jestże punktem spólnym dla innych średnic, których tyle być może prowadzonych, ile punktów linia krzywa zamyka? rozwiązanie tego zadania godne jest całą naszą zastanowić uwagę. Jeżeli punkt C jest punktem spólnym dla wszystkich średnic w linii 2go porządku, powinien on być niezawisłym od kąta między dwiema średnicami zawartego; potrzeba nam więc w rozwiązaniu tego pytania wiedzieć naturę kąta GCE czyli ten nie jest funkcją kąta współ-użytkowanych? jeżeli tak jest, należy nam dopiero szukać zrównania na oznaczenie punktu C dwom średnicom spólnego; w tym zrównaniu na punkt C , jeżeli znajdziemy g , albo h , będziemy mieli prawo sądzić, że punkt C odmienia się na każde dwie średnice; jeżeli zaś wyraz na punkt C nie będzie zamykał żadnej funkcji kąta iakiegokolwiek $L'P'Q$, wnieśliśmy że on jest zawsze ten sam dla wszystkich średnic linii krzywej. Idźmy za tą uwagą w ciągu całego rachunku szukając naśamprzód wyrazu kąta ECG . Przedłużymy średnice GI , EF ; pierwszą z nich przetnie oś w punkcie O , drugą zaś w punkcie R : będzie więc przy O , $PI=0$ i zrównanie (A), położywszy $z=0$, da

$$AO=x=-\frac{c}{e}; PO=-\frac{c}{e}-x=\frac{-ex-c}{e}, \frac{PL}{PO}=$$

$$\frac{ex}{-ex-c} = \frac{e}{2f} = \text{Sty. } AOL; \text{ a przeto styczna kątu}$$

$$PLO = \frac{2f}{e}. \text{ U punktu } R \text{ na drugiej średnicy opisa-}$$

nej zrównaniem (D), $QL'=q=0$. skąd wyciągamy

$$AR=p=\frac{-eg-bh}{eg+2dh}; QR=AR-AQ=$$

$$\frac{-eg-bh-p(eg+2dh)}{eg+2dh}; \text{ styczna kąta } ARL' = \frac{L'Q}{QR}$$

C_3

$$= \frac{q(eg+2dh)}{-cg-bh-p(eg+2dh)} = \frac{eg+2dh}{2fg+eh}; \text{ kąt } RCO =$$

$$ARL' - AOL; \text{ mając zaś tych dwóch ostatnich kątów}$$

$$\text{styczne za pomocą wzoru } \text{sty.}(a-b) =$$

$$\frac{\text{sty.}a - \text{sty.}b}{1 + \text{sty.}a \cdot \text{sty.}b}, \text{ znajdziemy } \text{sty.}RCO =$$

$$\frac{4dfh - e^2h}{4f^2g + 2feh + 2deh + e^2g},$$

ponieważ w tém ostatniem
zrównaniu znajduie się f, g , pewni jesteśmy, że kąt
między dwiema średnicami zawarty jest funkcją ką-
ta, który czynią współ-ufzykowane $P'L', P'Q$: nie zo-
staie nam więc, tylko znaleźć zrównanie na ozna-
czenie punktu C . Tén punkt znajdując się równie
na średnicy GI , i na EF , wyraża się przez przysta-
wą pionową CD za pomocą zrównań (A), (D). Na-
zwawszy $AD=r$, $CD=s$, i włożywszy r, s , za x, z ,
w zrównanie A , potem za p, q , w zrównanie D ,
otrzymamy ich dwa; $2fs + er + e = 0$

($2fg + eh$) $s + (eg + 2dh)r + eg + bh = 0$.
z dwóch tych zrównań wypada:

$$r = \frac{2fb - ce}{e^2 - 4df}, \quad s = \frac{zed - be}{e^2 - 4df}$$

Pierwsza wła-
sność śred-
nic.

W obydwóch tych zrównaniach nie zamyka się ża-
dną funkcją kąta między współ-ufzykowanemi za-
wartego, to jest ani g , ani h ; przeto punkt C jest
niezawisły od kąta średnic, i jest spólny wszystkim
średnicom. Punkt takowy nazywać będziemy ŚRÓD-
KIEM linii krzywey (*Centrum curvae*). Wartość na
 r , jest połową wartości wynalezionę na $AK + AH$,
przeto $AD = \frac{AK + AH}{2}$, przeto w każdej linii 2go po-

rzędku średnice przecinaiać się w punkcie C , dzielą
się w tém przecięciu na dwie części równe.

§. X.

Weźmy teraz środek C za początek odcinków,
średnicę zaś GI za oś, a obawwszy dobrze zrówna-
nie

nie (β) pod §. 8 wynalezioné, wyrazić ie możemy ogólniey:

$$y^2 = n + px + qx^2 \quad (\beta)$$

w niem $y=0$, zostawia zrównanie na punkta G, I,

$$n + px + qx^2 = 0. \text{ tak dalece: że } AG + AI = -\frac{p}{q}, AC =$$

$$\frac{AG + AI}{2} = -\frac{p}{2q}. \text{ Rachując odcinki s. środka C,}$$

$$\text{niech będzie } CP = t = -\frac{p}{2q} - x, \text{ czyli } x = -\frac{p}{2q} - t,$$

włożywszy tę wartość za x w zrównanie (β), prze-

$$\text{biemy ie na } y^2 = n - \frac{p^2}{4q} + qt^2, \text{ którego wyraz}$$

ogólny iest:

$$y^2 = a' - b'x^2 \quad (\gamma).$$

Trzy zrównania (α), (β), (γ), na linie krzywego 2go porządku, znakomite są warunkami, s których wypadły. Pierwsze wyraża związek współ-użytkowanych do iakiejkolwiek osi odnolzonych: drugie pokazuje średnicę wziętą za oś; trzecie nakoniec uczy, że średnica iest osią, a środek linii krzywey początkiem odcinków. W tém ostatniém biorąc x dodatnie albo odjemne, nie się cale nie odmienia; co nás uczy, że kiedy $CP = CP'$, będzie także $PM = P'M'$, i linia MM' równo-legła osi GI , przeciętą iest od BC na dwie części równe. BC więc má tę samę własność którą służy GI , iż cięciwy równo-ległe GI przecina na dwie części równe, tak iako GI przecina cięciwy równo-ległe BC . Przeto linia BE równo-legła przystawom przechodzącą przez środek C iest drugą średnicą. Dwie takowe średnice, s których jedna przecina cięciwy równo-ległe drugiey na dwie części równe, nazywają się ŚREDNICAMI SPRZĘŻONEMI (*Axes conjugati*). Styczna więc linii krzywey prowadzona do punktu G , albo I , iest zawsze równo-legła drugiey średnicy sprzężonéy BE ; i znowu

styczna

Wynayduie się
związek między
średnicami i
iakiemiś
kolwiek,

Fig. 20,

styczna przy punkcie B, albo E jest równoległą GI
podług §. 8. W równaniu (γ) uczyniwszy $x=a$,
 $y=\pm\sqrt{a'}=CB$, nazwawszy $BC=k$, będzie $a'=k^2$,
uczyniwszy zaś $y=0$, mamy $x=\pm\sqrt{\frac{a'}{b'}}=CG$; niech

będzie $CG=g$, wypadą $b'=\frac{k^2}{g^2}$; włożywszy tę war-
tości w równanie (γ), otrzymamy:

$$y^2=k^2-\frac{k^2}{g^2}x^2 \quad (C')$$

gdzie same średnice sprzężone są ilościami statecznemi.

W każdej linii 2go porządku mającej środek C, a przeto nieskończoną liczbę średnic, jedney iakiejkolwiek średnicy odpowiada drugą sprzężoną; zostaje nam więc porównać między sobą takowe średnice, przez wynalezienie związku zachodzącego między średnicami iakiemikolwiek, i między średnicami sprzężonemi: co nas wieść może do nowych własności średnic, i do sposobu dokładniejszego na prowadzenie stycznych. Sposób użyty na otrzymanie równania (C') służyć nam powinien za wzór do terazniejszego wynalazku; przecież bowiem potrafiliśmy ilości stateczne równania (γ) przez średnice wyrazić. Gdybyśmy jeszcze mogli za też ilości stateczne równania (γ) wprowadzić funkcye kątów między średnicami zawartych, mielibyśmy związek średnic przez kąty wyrażony, a przeto zupełne rozwiązanie pytania. Na ten koniec przypuśćmy, że równanie (γ) wyraża związek między współ-ufzykowanemi $CP=x$, $PM=y$ nakłonionemi do siebie kątem $APM=q$, którego wstawia m, dostawa n; chcąc tę współ-ufzykowane przerobić na inższe odniesione do swojej osi, poprowadźmy z punktu M cięciwę MO czyniącą kąt $AQM=p$, którego wstawia r, dostawa s; będzie więc RS osią nowęj tej cięciwy, HK

osią

Fig. 27.

osią sprzężoną. Potrzeba nam teraz zrównanie (γ) przerobić na inne do osi RS, i współ-ufzykowanych CD, DM. Aże CD jest funkcją CQ, i DQ; DM funkcją QM, DQ; idzie zatem że muszemy wprzód z zrównania (γ) wyciągnąć wartości na CQ, QM; to jest: trzeba nam nałamprzód współ-ufzykowane CP, PM, przerobić na CQ= t , QM= u , a dopiero s tych ostatnich wyciągnąć wartości na CD, DM. Tę wzy-
 ftkie rozumowania wyszczególni rachunek następują-
 cy. Kąt PMQ= $p-q$, Wst. ($p-q$)= $rn-sm$, przeto,
 $PM=y=\frac{ru}{m}$, $PQ=\frac{rn-sm}{m}$ u; $x=t-QP=t-$

$\frac{rn-sm}{m}$ u; włożywszy te wartości za x, y, w zró-

wnanie (γ), przerobiemy je na

$$u^2 - \frac{2b'mt(rn-sm)}{r^2+b'(rn-sm)^2} u + \frac{b'^2t^2-a'm^2}{r^2+b'(rn-sm)^2} = 0.$$

dwa pierwiastki tego zrównania są QM-QO= $\frac{2b'mt(rn-sm)}{r^2+b'(rn-sm)^2}$, ponieważ D jest w środku cięciwy

$$MO; QD = \frac{QM-QO}{2} = \frac{b'mt(rn-sm)}{r^2+b'(rn-sm)^2}; \text{ potrzeba}$$

nam teraz wynaleźć kąty, ACD, RDM; dla łatwiey-
 szego linii między sobą skófowania przeniesmy te
 kąty na fig. 22. utrzymawszy nazwiska już kątom
 AQM, APM, nadane, i od D spuściwszy prosto-padłą
 mamy BD=QD.r; BQ=QD.s; przeto styczna kąt

$$ACD = \frac{BD}{BC} = \frac{QD.r}{CQ+QD.s} = \frac{b'm(rn-sm)}{r+b'n(rn-sm)}; \text{ styczna}$$

$$BDC = \frac{CQ+QD.s}{QD.r}; \text{ sty. BDQ} = \frac{s}{r}; \text{ więc sty. QDC} =$$

$$\text{sty. (BDC-BDQ)} = \frac{r.CQ}{DQ+CQ.s} = \text{sty. RDM. S tych}$$

dopiero wynalezionych linii i kątów łatwo nam bę-
 dzie

Fig. 22.

dzie znaleźć CD ; wiemy bowiem że $CD^2 = CQ^2 +$

$$2s \cdot CQ \cdot DQ + QD^2 = t^2 + \frac{2b'mt^2s(rn-sm)}{r^2+b'(rn-sm)^2} +$$

$$\frac{b'^2m^2t^2(rn-sm)^2}{[r^2+b'(rn-sm)^2]^2}. \text{ Drugi ten człon przywiódł-}$$

czy do iednego mianownika, otrzymamy:

$$CD^2 = \frac{r^4 + [2b'r^2ms + (2br^2 + b^2m^2)(rn-sm)](rn-sm)t^2 +}{[r^2+b'(rn-sm)^2]^2} + \frac{[2b^2ms(rn-sm)^2 + b^2(rn-sm)^3](rn-sm)t^2}{[r^2+b'(rn-sm)^2]^2}$$

ilości w liczniku między nawiasami kwadratowemi zawarte rozebraliśmy, i zapomocą dwóch równań $m^2+n^2=1$, $r^2+s^2=1$, wyraziwszy

$$b'^2m^3s^2 = b'^2m^3s - b'^2r^2sm + b'^2r^2n^2sm;$$

$$r^3n^3b^2 = r^3nb^2 - b^2m^2nr + b^2m^2s^2rn;$$

kilka terminów zniknie, i zostanie.

$$CD^2 = \frac{r^4 + 2b'r^3n(rn-sm) + b'^2r^2(nr-sm)^2}{[r^2+b'(rn-sm)^2]^2}$$

$$CD = \frac{rt \cdot \sqrt{[r^2 + 2b'rn(rn-sm) + b'^2(nr-sm)^2]}}{r^2 + b'(rn-sm)^2}$$

nazwiemy teraz nowe współ-ufzykowane $CD=w$, $DM=z$; wypadnie naprzód z ostatniego równania na CD .

$$t = \frac{(r^2 + b'(rn-sm)^2)w}{r\sqrt{[r^2 + 2b'rn(rn-sm) + b'^2(nr-sm)^2]}}$$

a ponieważ $u = QD + z = z + \frac{b'ni(rn-sm)}{r^2+b'(rn-sm)^2}$, włożywszy w to równanie wartość znalezioną na t , otrzymamy:

$$u = z + \frac{b'mw(rn-sm)}{r\sqrt{[r^2 + 2b'rn(rn-sm) + b'^2(nr-sm)^2]}}; \text{ aże}$$

$$x = t - \frac{(rn-sm)u}{m}, y = \frac{ru}{m}, \text{ położywszy za } t, u, \text{ wár-}$$

tości dopiero odkryte, wypadnie:

$$x =$$

$$x = \frac{rw}{\sqrt{[r^2 + 2b'rn(rn-sm) + b'^2(nr-sm)^2]}} - \frac{(rn-sm)z}{m}$$

$$y = \frac{rz}{m} + \frac{b'w(rn-sm)}{\sqrt{[r^2 + 2b'rn(rn-sm) + b'^2(nr-sm)^2]}}$$

wartości te za x, y , położywszy w równaniu (A), zamieniemy je na inne wyrażające związek między CD, i DM:

$$\frac{r^2 + b'(rn-sm)^2}{m^2} z^2 + \frac{b'[r^2 + b'(rn-sm)^2]}{r^2 + 2b'rn(rn-sm) + b'^2(rn-sm)^2} w^2 - a' = 0 \quad (D).$$

Damy teraz nazwiska kątom zachodzącym między średnicami: $APM = ACE = q$; $AQM = ACH = p$, $GCR = A'$; $ECH = B'$; $p = q + B'$, $RCH = q + B' - A'$; $m = Wft.q$, $n = Dofl.q$, $r = Wft.(q + B')$, $s = Dofl.(q + B')$, $rn - sm = Wft.B'$. Wynaleźliśmy już wyżey styczną

$$ACD = Sty.A' = \frac{b'm(rn-sm)}{r + b'n(rn-sm)}, \text{ s kąd wypada}$$

$$Wft.A' = \frac{b'm(rn-sm)}{\sqrt{[r^2 + 2b'rn(rn-sm) + b'^2(rn-sm)^2]}}$$

$$r^2 + 2b'rn(rn-sm) + b'^2(rn-sm)^2 = \frac{b'^2 m^2 (rn-sm)^2}{Wft.A'^2},$$

włożywszy tę wartość w mianownika 2go członka równania (D); i przetłómaczywszy litery wszystkie na wstawy i dostawy kątów wprowadzonych; to równanie stanie się:

$$\frac{Wft.(q+B')^2 + b'Wft.B'^2}{Wft.q^2} z^2 + \frac{(Wft.(q+B')^2 + b'Wft.B'^2)Wft.A'^2}{b'Wft.q^2 Wft.B'^2} w^2 - a' = 0 \quad (D).$$

pamiętamy jeszcze o wartościach wydobytych z równania (γ) na a', b' , że na fig. 21. $a' = k^2 = CE^2$;

Fig. 21.

$$b' = \frac{k^2}{g^2} = \frac{CE^2}{CG^2}. \text{ Równanie na sty.A', daie nam}$$

$$C\delta \quad b' =$$

$$b' = \frac{\text{Sty. } A'. W\beta. p.}{\frac{W\beta. B' (W\beta. q - \text{Sty. } A' D o\beta. q)}{k^2} - \frac{W\beta. A' W\beta. (q+B')}{g^2}} = \frac{k^2}{g^2} = \frac{CE^2}{CG^2}, \text{ czyli} \\ = \frac{g^2}{W\beta. B' W\beta. (q-A')} \quad (L).$$

(L) zamykają w sobie związek między dwiema średnicami sprzężonemi. Jeżeli w równaniu (D), $CD=w=0$; DM zamieni się na $CH=z$, i (D) da nam z

$$\text{czyli } CH = \frac{CE \cdot CG \cdot W\beta. q}{\sqrt{[CG^2 W\beta. (q+B')^2 + CE^2 W\beta. B'^2]}};$$

II. Właściwość
średnic.

uczyniwszy podobnie w (D) $z=0$, wypadnie wartość na $w=CR$

$$CR = \frac{CE^2 \cdot W\beta. q \cdot W\beta. B'}{W\beta. A' \sqrt{[CG^2 W\beta. (q+B')^2 + CE^2 W\beta. B'^2]}}; \text{ więc}$$

$$\frac{CR}{CH} = \frac{CE \cdot W\beta. B'}{CG \cdot W\beta. A'} \quad \text{---} \quad CG \cdot W\beta. A' \cdot CR = CE \cdot W\beta. B' \cdot CH \quad (1).$$

to ostatnie równanie nas uczy, że złączywszy przez linią prostą punkta E, H; podobnie znowu punkta G, R, trójkąt $GRC =$ trójkątowi ECH .

$$\frac{CR}{CH} = \frac{CE^2 \cdot W\beta. B'}{CE \cdot CG \cdot W\beta. A'}, \text{ włożywszy z równania (L)}$$

$$\text{w teraźniejszą wartość na } CE^2 = k^2 \\ = \frac{CG^2 \cdot W\beta. A' \cdot W\beta. (q+B')}{W\beta. B' W\beta. (q-A')}; \text{ wypadnie } \frac{CR}{CH}$$

III. Właściwość
średnic.

$$= \frac{CG \cdot W\beta. (q+B')}{CE \cdot W\beta. (q-A')} \quad \text{---} \quad CR \cdot CE \cdot W\beta. (q-A') = CH \cdot W\beta. (q+B') \cdot CG \quad (2)$$

to jest: że złączywszy znowu punkta R, E; tudzież punkta G, H, będzie w każdej linii 2go porządku trójkąt $RCE =$ trójkątowi GCH .

Srednice CR, CH, wyrażiliśmy przez ułamek, którego mianownik $CG^2 W\beta. (q+B')^2 + CE^2 W\beta. B'^2 =$

$$\frac{CG^2 \cdot W\beta. (q+B')}{W\beta. (q-A')} [W\beta. (q+B') W\beta. (q-A') + W\beta. A' \cdot W\beta. B'] \\ = \frac{CG^2 \cdot W\beta. q \cdot W\beta. (q+B') \cdot W\beta. (q+B'-A')}{W\beta. (q-A')}; \text{ drugi} \\ \text{członek}$$

członek tego zrównania wypada, włożywszy za CE^2 wartość wyciągniętą z (L); trzeci zaś, wykonawszy mnożenie funkcyi między nawiasami kwadratówemi, i położywszy naprzód za $Do\beta.q^2 = 1 - W\beta.q^2$; powtórę za $W\beta.q.Do\beta.(B' - A') + Do\beta.q.W\beta.(B' - A') = W\beta.(q + B' - A')$: Ostatnią tę mianownika wartość włożywszy w CH, otrzymamy:

$$CH = CE \sqrt{\left[\frac{W\beta.q.W\beta.(q - A')}{W\beta.(q + B')W\beta.(q + B' - A')} \right]} \dots (Q).$$

włożywszy ją zaś w CR, będzie $CR = \frac{CG.W\beta.(q + B')}{W\beta.(q - A')}$.

$$\sqrt{\left[\frac{W\beta.(q - A').W\beta.q}{W\beta.(q + B')W\beta.(q + B' - A')} \right]}: \text{ skąd wypada}$$

IV. własność
średnic.

$$CR.CH = \frac{CG.CE.W\beta.q}{W\beta.(q + B' - A')} \text{ czyli}$$

$$CK.CH.W\beta.(q + B' - A') = CG.CE.W\beta.q \dots (3).$$

to ostatnie zrównanie nas uczy, że złączymy przez linie proste punkta R, H; G, E; trójkąt RCH = trójkątowi GCE. Mamy więc

z (1) Trójkąt GCR = trójkątowi ECH.

(2) Trójkąt RCE = trójkątowi GCH.

(3) Trójkąt RCH = trójkątowi GCE.

Aże Trapez RGCE = $\triangle GCR + \triangle RCE$.

Trapez EHCR = $\triangle EHC + \triangle RCE$.

więc Trapez GRCE = trapezowi EHCR. Oprócz tego trapez EHCR = $\triangle RCH$ = trapezowi GRCE = $\triangle GCE$; przeto trójkąt ERH = trójkątowi RGE, które mając wspólną zasadę RE, dowodzą, że cięciwa RE jest równoległą cięciwie GH i $\triangle RHG = \triangle EGH$. Ponieważ zaś

Trapez RGCH = $\triangle RHG + \triangle GCH$,

Trapez GEHC = $\triangle EGH + \triangle GCH$,

więc Trapez RGCH = trapezowi GEHC.

Każde z tych zrównań pokazuje nam nową własność średnic sprzężonych w liniach 2go porządku, i oraz związek iednych z drugimi. Ten związek w funkcyach kątów między średnicami zawartych należy do nas tłumaczyć zrównania (L), (Q). §. XI.

V. własność
średnic.

§. XI.

Sposób prowadzenia fig. (L) i (Q), stółując się do fig. 23, gdzie GC, CH, są dwie średnice sprzężone; CM, CK, dwie drugie, kąty $GCH=q$; $MCG=A'$; $HCK=B'$; $GCK=p=q+B'$; $MCH=q-A'$; $MCK=q+B'-A'$; zrównanie (Q) daie

Fig. 23.

$$\text{nám w teraźniejszej figurze} \quad - \quad - \quad - \quad \frac{CM^2}{CG^2} = - \quad - \quad -$$

$$\frac{W\beta.q.W\beta.(q+B')}{W\beta.(q-A').W\beta.(q+B'-A')} \quad ; \quad \text{zrównanie zaś (L)} \quad - \quad - \quad -$$

$$\frac{HC^2}{W\beta.A'.W\beta.(q+B')} \quad ; \quad - \quad - \quad - \quad \frac{HC^2+GC^2}{GC^2} =$$

$$\frac{GC^2}{W\beta.q.W\beta.(B'+A')} \quad ; \quad - \quad - \quad - \quad \frac{GC^2}{W\beta.B'.W\beta.(q-A')} \quad ; \quad \text{s tegoż samego zrównania (L)}$$

$$\text{wyciągamy} \quad \frac{CK^2}{CM^2} = \frac{W\beta.A'.W\beta.(q-A')}{W\beta.B'.W\beta.(q+B')} \quad ; \quad \frac{CK^2+CM^2}{CM^2}$$

$$\frac{W\beta.A'.W\beta.(q-A')+W\beta.B'.W\beta.(q+B')}{W\beta.B'.W\beta.(q+B')} \quad ; \quad \text{chcąc osta-$$

tniego ułamku licznika przerobić, przypomniemy sobie z Algebry wzory pod §§. 51, 54.

$$W\beta.a.W\beta.b = \frac{1}{2}Do\beta.(a-b) - \frac{1}{2}Do\beta.(a+b)$$

$$\frac{1}{2}Do\beta.b - \frac{1}{2}Do\beta.a = W\beta.\frac{a+b}{2}.W\beta.\frac{a-b}{2}$$

które stółując do ostatniego zrównania, otrzymamy:

$$W\beta.A'.W\beta.(q-A') = \frac{1}{2}Do\beta.(q-2A') - \frac{1}{2}Do\beta.q$$

$$W\beta.B'.W\beta.(q+B') = \frac{1}{2}Do\beta.q - \frac{1}{2}Do\beta.(q+2B')$$

$$\text{przeto } W\beta.A'.W\beta.(q-A') + W\beta.B'.W\beta.(q+B') = \frac{1}{2}Do\beta.$$

$$(q-2A') - \frac{1}{2}Do\beta.(q+2B') = W\beta.(q+B'-A').W\beta.(B'+A')$$

$$+ A') \quad ; \quad \frac{CK^2+CM^2}{CM^2} = \frac{W\beta.(q+B'-A').W\beta.(B'+A')}{W\beta.B'.W\beta.(q+B')}$$

$$\text{s kąd wypada} \quad \frac{HC^2+CG^2}{CK^2+CM^2} = \quad - \quad - \quad - \quad \frac{GC^2}{CM^2}$$

$$\frac{W\beta.q.W\beta.(q+B')}{W\beta.(q-A').W\beta.(q+B'-A')} \quad ; \quad \text{aże} \quad W\beta.$$

$$\frac{W\beta.(q-A').W\beta.(q+B')}{W\beta.(q-A').W\beta.(q+B'-A')} = \frac{CM^2}{CG^2}, \text{ więc}$$

$$HC^2 + CG^2 = CK^2 + CM^2.$$

VI. Właśność
średnic.

to jest: że w każdej linii zgo porządku summa kwadratów z dwóch średnic sprzężonych jest nieodmienne. S tęj własności wypada nam sposób prowadzenia stycznych do jakiegokolwiek punktu linii krzywej. Chcąc n.p. prowadzić styczną do punktu M, a mając dwie średnice sprzężone CG, CH, wiadome; biorę linią CM za średnicę, której odpowiadającą średnicą sprzężoną CK, jest równoległą styczney MT: cały więc sposób zawisł od wynalezienia CK, którą z ostatniego zrównania wypada.

$$CK = \sqrt{[HC^2 + CG^2 - CM^2]}$$

Inny iefzcze sposób na wynalezienie CK, podaie nam §. poprzedzający. Wiemy bowiem że cięciwa prowadzona od H do M, jest równoległą cięciwie KG, co nam pokazuje mieysce na linii krzywej, od którego CK má być prowadzona do środka C.

§. XII.

Przeciągniemy średnicę CG póki nie przetnie styczney w mieyscu T, a poprowadziwszy od M linią MN równoległą HC, otrzymamy dwa trójkąty PMC, MTC: w pierwszym kąt MPC = 180° - MPG. Wstawia więc kąta MPC = Wβ.MPG = Wβ.HCG = Wβ.q; Wβ.CMP = Wβ.HCM = Wβ.(q - A'), Wβ.MTC = Wβ.TCD = Wβ.KCG = Wβ.(q + B'); Wβ.CMT = Wβ.KCM = Wβ.(q + B' - A'); a przeto

Srednice równaia się stycznemi i stąd wyciągaia się dalsze własności średnic.

Fig. 23.

$$MC:MP = W\beta.q:W\beta.A' - - W\beta.q = \frac{MC.W\beta.A'}{MP};$$

$$MP:CP = W\beta.A':W\beta.(q-A'); W\beta.(q-A') = \frac{CP.W\beta.A'}{MP}$$

$$CM:CT = W\beta.(q+B'):W\beta.(q+B'-A'); W\beta.(q+B'-A') = \frac{CT.W\beta.(q+B')}{CM}$$

CM:

$$CM:MT = W\beta.(q+B'):W\beta.A'; W\beta.(q+B') = \frac{W\beta.A'.CM}{MT}$$

włożywszy te wartości wstaw w równanie (Q), otrzymamy:

$$\frac{CM^2}{CG^2} = \frac{CM^2}{CP \cdot CT}, \text{ to jest } CG^2 = CP \cdot CT, \text{ czyli}$$

$$(1) CP:CG = CG:CT$$

$$CP:CG - CP = CG:CT - CG, \text{ czyli}$$

$$(2) CP:PG = CG:GT$$

$$CP:CP + CI = CG:CT + CG, \text{ to jest:}$$

$$(3) CP:IP = CG:IT.$$

więc. wzięwszy znowu BN, EF, za dwie średnice sprzężone, i przeciągnąwszy pierwszą póki nie przecnie średnicy w miejscu A, a od M spuściwszy MQ równoległą CE, i tym do punktów N, B, poprowadzimy styczne równoległe, trzy ostatnie proporcje uczą nas, że:

$$(1) CQ:CN = CN:CA.$$

$$(2) CQ:QN = CN:NA \dots NA = \frac{CN \cdot QN}{CQ}$$

$$(3) CQ:BQ = CN:BA \dots BA = \frac{CN \cdot BQ}{CQ}$$

s podobieństwa zaś trójkątów NTA, MQA, LBA, wypada:

$$AN:QA = NT:QM \dots (d).$$

$$BA:QA = BL:QM \dots (e).$$

$$QA = QN + NA = QN + \frac{CN \cdot QN}{CQ} = \frac{BQ \cdot QN}{CQ}, \text{ więc}$$

$$NA:QA = CN:BQ = NT:QM \dots \text{z (2), (d)}$$

$$BA:QA = CN:QN = BL:QM \dots \text{z (3), (e)}$$

$$NT = \frac{CN \cdot QM}{BQ} \dots BL = \frac{CN \cdot QM}{QN} \dots NT \cdot BL = \frac{CN^2 \cdot QM^2}{BQ \cdot QN}$$

VII. własność
średnic,

$$\text{aże podług własności drugiej w §. 8. } QN \cdot BQ : QM^2 \\ = CN^2 : CE^2, \text{ skąd } CE^2 = \frac{QM^2 \cdot CN^2}{QN \cdot BQ} \quad CE^2 = NT \cdot BL$$

to jest:

NT

$$NT:CE=CE:BL.$$

w linii 2go porządku średnica jest średnią proporcjonalną między dwiema stycznymi iey równoległymi. Z równań na NT, BL, CE², między sobą kombinowanych wypadają jeszcze:

$$NT^2:BQ^2=CE^2:QN.BQ \dots NT=CE\sqrt{\frac{QN}{BQ}};$$

$$BL^2:QN^2=CE^2:QN.BQ \dots BL=CE\sqrt{\frac{BQ}{QN}}, \text{ a przeto}$$

$QN:BQ=NT^2:CE^2=CE^2:BL^2=TM:ML=NT:BL$; i poprowadziwszy do punktu V styczną SR; przecinającą NT, BL, w punktach R, S, będzie także CE średnią proporcjonalną między NR, i BS.

Wszystkie dotąd wyłożone własności dają nam sposób wyrażenia średnic ukośnych iednych przez drugie; chcąc od nich przyiść do poznania średnic pionowych, potrzeba kąt MCK wziąć za kąt prosty, i do niego stółownie odmieniwszy inne kąty, wprowadzić im odpowiadające wstawy w równania (L), (Q); będzie zaś kąt $MCK=q+B'\rightarrow A'=90^\circ$, iego wstawa $=1$; czyli $B'=90^\circ-(q-A')$; $Wst.B'=Dofl.(q-A')$; $B'+q=90^\circ+A'$; $Wst.(B'+q)=Dofl.A'$; wprowadziwszy te wartości wstaw w równania (L), (Q), pierwsze z nich zamieni się na:

$$\frac{HC^2}{GC^2} = \frac{Wst.A'.Dofl.A'}{Dofl.(q-A')Wst.(q-A')} = \frac{Wst.2A'}{Wst.2(q-A')} =$$

$\frac{1}{\frac{Wst.2q.Dofl.2A'-Dofl.2q}{Wst.q.Dofl.A'}} = 1 - \frac{1}{Dofl.q.Sty.A'}$; równanie zaś (Q) sta-

$$\text{nie się } \frac{CM^2}{CG^2} = \frac{Wst.q.Dofl.A'}{Wst.(q-A')} = 1 - \frac{1}{Dofl.q.Sty.A'}$$

$= 1 - \frac{Sty.q}{Sty.A'}$; aże równanie (3) pod §.10. daje nam

$$CM.CK=CG.CH.Wst.q; \text{ i znowu własność VI } \begin{aligned} CH^2+CG^2 &= CM^2+CK^2; (CM+CK)^2-2CK.CM=CH^2 \\ &+CG^2; (CM-CK)^2+2CK.CM=CM^2+CK^2=CH^2+CG^2 \end{aligned}$$

D

włoży-

włożywszy za CK, CM jego wartość, otrzymamy:

$$CM + CK = \sqrt{[CG^2 + CH^2 + 2CG \cdot CH \cdot \cos q]}$$

$$CM - CK = \sqrt{[CG^2 + CH^2 - 2CG \cdot CH \cdot \cos q]}$$

Fig. 20, te dwa zrównania dają nam CM, CK , w funkcji CG, CH . Średnice do siebie pionowe iakie są CM, CK , albo na fig. 20. GI, BE nazywają się GŁÓWNEMI (*Diametri principales*). Zrównanie (C') w §. 10. właśnie Ruży wespół-ufzykowanym na takowych średnicach rachowanym $y^2 = \frac{k^2}{g^2}(g^2 - x^2)$; w niem x, y ,

będąc w samych potęgach drugich nie odmienną nie stawia się z dodatnych odjemnymi, i przeciwnie; co dowodzi, że linia krzywa przedzieloną takimi średnicami jest w swoim ryfunku i wielkości ze wszystkich stron równą, czyli że odnoga nad GI równa odnodze pod GI , i odnoga położona z jednej strony BE jest równa odnodze położonej z drugiej strony BE ; to jest: że dwie średnice główne linia krzywą opisaną zrównaniem (C') rościainą na cztery części równe i podobne. Tu pokazuje się sposób dochodzenia w liniach iakichkolwiek porządków, wyższych, czyli te mają średnice lub nie? o czém nam niżej mówić przypadnie. Pociągnąwszy z środka C do M

linią CM , ięj wartość będzie $\sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{[x^2 + \frac{k^2}{g^2} - x^2]}$, a położywszy $k = g$, wypadą $CM = g$, to

jest że w linii 2go porządku mającej dwie średnice sobie równe, linia prosta z środka do iakiegokolwiek punktu obwodu pociągnięta, wyrazić się może wymiennie, i jest ilością stałą, która to własność służy kołu. Ale kiedy dwie średnice główne są nierówne, linia prosta CM jest zawsze funkcją niewymienną; ale niemażli na średnicy GI iakiego punktu tą własnością znakomitę? Na rozwiązanie tego pytania, przypuśćmy że F jest takowym punktem, od którego linia prowadzona do M jest funkcją wymienną: potrzeba nam więc wynaleść $CF = f$, ponieważ

ROZDZIAŁ II.

waż $CP=x$, $PM=y$, będzie $FP=f-x$, $FM^2=(f-x)^2+y^2=(f-x)^2+\frac{k^2}{g^2}(g^2-x^2)$, czyli $FM^2=\frac{x^2(g^2-k^2)-2fg^2x+(f^2+k^2)g^2}{g^2}$, żeby więc FM było funkcją wymierną, potrzeba żeby licznik ostatniego ułamku był zupełną potęgą drugą, a przeto $\frac{f^2g^4}{(g^2-k^2)^2}=\frac{(f^2+k^2)g^2}{g^2-k^2}$, rozwiązawszy to ostatnie równanie

znajdziemy $f^2=g^2-k^2$, $f=\pm\sqrt{g^2-k^2}$, ponieważ f ma dwie wartości równe, jedną dodatnią a drugą ujemną; punktów takowych znajduje się dwa w równej odległości z obydwóch stron środka C . Ale że wartość na f nie może być rzetelną tylko kiedy $g>k$, punkta takowe nie mogą się znajdować tylko na średnicy większej, i są tém odleglejsze od środka C , im różnica dwóch osi GC , BC jest większą, to jest, im linia krzywa jest dłuższą a wąźszą. Punkta te nazywają się OGNISKAMI (*Foci curvae*). Ponieważ trafiały na te punkta biorąc średnicę GI za oś, dla tego ta nazywa się osią większą albo osią POPRZECZNĄ (*Axis major, transversus*), drugą średnicą BC nazywa się OSIĄ MNIEJSZĄ SPRZĘŻONĄ, (*Axis minor, conjugatus*). Punkta G , I , nazywają się WIERZCHOŃKAMI (*Vertices*) u których styczne są zawsze równoległe BC . Włożywszy wartość odkrytą na f w FM , wypadnie $FM=g-\frac{x\sqrt{g^2-k^2}}{g}$, $GM=g+\frac{x\sqrt{g^2-k^2}}{g}$;

Właściwości ognisk i linii z nich wychodzących.

Fig. 20.

weźmy teraz za odcinek $CF=x=\pm\sqrt{g^2-k^2}$, i włożywszy tę wartość za x w równanie (C') wypadnie $y=\frac{k^2}{g}=FR$, to jest, że przystawa z ogniska prowadzona pionowo jest ilością stałą, i trzecią proporcjonalną między dwiema osiami głównymi. Podwójną taką przystawą czyli cięciwą RS nazywają się

D_2

się

się MIARĄ albo LINIĄ RÓWNANIA (*Parameter, latus rectum*), dla tego, że służyć może za miarę porównywaną, czyli za jedność współ-użytkowanym. Nazwiemy teraz odległość ogniska od wierzchołka $FG=d$, $FR=\frac{k^2}{g}$

$$=c, \text{ mamy } f=g-d=\sqrt{g^2-gc}, \text{ a przeto } g=\frac{d^2}{2d-c};$$

$k=d\sqrt{\frac{c}{2d-c}}$; mając znane c, d , mamy wszystko w linii krzywey wiadome.

Zrównanie
biegunowe na
linię zgo po-
rządku,

Mając już obydwie osi wyrażone, przez odległość ogniska od wierzchołka d , i przez miarę równania c , łatwo nam jest bardzo linią iakąkolwiek FM przez c i d wyrazić, a wciągnąwszy jeszcze kąt GFM , który ta linia czyni z osią, odkryć zrównanie między FM , i tymże kątem; a naprzód ponieważ $FM=g-x\sqrt{g^2-k^2}=\frac{g}{g}-\frac{x(g-d)}{g}$, kładąc za g , wartość zna-

$$\text{leżoną } \frac{d^2}{2d-c}, \text{ będzie } g-d=\frac{dc-d^2}{2d-c}; \quad FM=\frac{d^2}{2d-c}-\frac{(c-d)x}{d}; \text{ nazwawszy } FP=z, \text{ będzie } x=CF-z=$$

$$\frac{(c-d)d}{2d-c}-z, \text{ włożywszy w } FM \text{ tę wartość za } x, \text{ o-}$$

$$\text{trzymamy } FM=c+\frac{(c-d).z}{d}=c-\frac{(d-c)z}{d}. \text{ Niech te-}$$

raz będzie kąt $GFM=v$, przeto $z=-FM$. Dośł. włożywszy tę wartość za z w FM , i nazwawszy $FM=r$, otrzymamy zrównanie:

$$r=\frac{dc}{d-(d-c)\text{Dośł. } v}. \quad (Aa).$$

to zrównanie zamyka dwie ilości r , kąt v , które wzięwszy za ilości odmienne, wyrażemy nowym sposobem wszystkie gatunki linii zgo porządku. Na-
leży

Jeży nam tu ostrzec, że (Aa) jest zrównaniem náyważniéyszym, i náywiększego użycia w Astronomii, gdzie ie nazywać zwykli ZRÓWNANIEM BIEGUNOWEM (*Aequatio Polaris.*)

I téż to są właśności powszechné wszystkim liniom 2go porządku, których użył Newton do rachowania biegu ciół Niebieskich, w swém nieśmiertelném dziele: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, a które J. P. Euler wyciągnął z uwąg ogólnych zrównania 2go stopnia między dwiema odmiennymi x, y , sposobém tu od nás użytym.

§. XIII.

Po wyłożonych ogólnych właśnościach wszystkich Gatunki linii linii 2go porządku, przypada nam poznać różne ich krzywych 2go gatunki za pomocą szczególnych warunków wpro- wadzonych w zrównanie (β) . §. 10. $y^2 = n + px + qx^2$.

Aże natura i ryfunek linii krzywych zależy od natury pierwiastków zrównania (β) ; téż zaś pierwiastki od stanu i wartości ilości statecznych n, p, q ; idzie za tém, że warunki pewné przywiązane do tych ilości statecznych, dadzą początek różnym gatunkóm linii 2go porządku. Nie zapominámy ielzce o tém, że px bydz może wyrzucone, bez naruszenia natury zrównania; że n w swym znaku zawisło od q , iako dzielnika, że na koniec x odmieniając się dosięć może iakichkolwiek wartości nadanych n, q ; a przeto że gatunków różnych linii krzywych nie należy nam upatrywać tylko w różnych znakach q , albo w iego zniszczeniu. Biorąc więc q za odjemné, dodatné, lub zero; wypadć nam powinny linie krzywe 2go porządku, každému warunkowi odpowiadające. Zaczniemy od q odjemného, a odnioszfy początek od-

cinków do środka, czyli uczyniwszy $x = x + \frac{p}{2q}$,

trzymámy zrównanie

$$y^2 = b - qx^2$$

Dz

gdzie

Elipsa i jej
właściwości.

gdzie $b = n + \frac{p^2}{4q}$; chcąc poznać ryfunek linii tém zróż-

wnaniem opisaney, uważáymy náprzód czyli má odnogi nieskończone lub nie? to jest, czyli przeszedłszy przez wszystkie wzrosty x , wartości na y wypadną rzetelne lub urojone. Ponieważ q jest odjemnem, $-qx^2$ nieprzestanie nigdy być odjemnem; a przeto y nie będzie rzetelném, tylko kiedy $b > qx^2$, czyli $x < \sqrt{\frac{b}{q}}$, linia więc krzywą skończy się na odcinku

równym $\sqrt{\frac{b}{q}}$ wziętym z obu dwóch stron osi, a przeto

Fig. 24.

nie má żadney odnogi nieskończoney. Wziąwszy więc na fig. 24. S za środek linii krzywey i początek odcinków razem, $SA = \sqrt{\frac{b}{q}}$, $SB = -\sqrt{\frac{b}{q}}$; po-

niemáż na $x = \pm \sqrt{\frac{b}{q}}$, $y = 0$, linia krzywą przeciąwszy

oś w punktach A, B , skończy się na nich. Uważamy iefzcze iak daleko u S przyftawy się rościagną: w miéyfcu S , $x = 0$, $y = \pm \sqrt{b}$, to jest że przyftawa u S jest ilością státeczną skończoną, a przeto wzięwszy $CS = \sqrt{b}$, linia krzywą zamknie się między czterémá punktami A, B, C, D , czyli między dwiema średnicami AB, CD , którą nazwano ELLIPSA (*Ellipsis*). Widzieliśmy dopiero że SA, SC , są funkcyami ilości státecznych b, q , wchodzących w zrównanie: niech

będzie $SA = g = \sqrt{\frac{b}{q}}$, $SC = k = \sqrt{b}$, przeto $b = k^2$,

$q = \frac{k^2}{g^2}$, i zrównanie na Ellipsę zamieni się na inné:

$$y^2 = \frac{k^2}{g^2}(g^2 - x^2) \quad \dots \quad (A).$$

gdzie SA, SC , które odtąd nazywać będziemy półosiami Elipsy, będą ilościami státecznemi zrównania.

W §. 12.

W §. 12. znaleźliśmy dwa ogniska na linii 2go porządku, czyli $f = \pm \sqrt{g^2 - k^2}$ które znajdują się w każdej linii mającej dwie średnice nierówne, a przeto w Ellipsie: im g większe będzie od k , tem SF czyli f będzie dalsze od środka; a przeto Ellipsa dłuższa: im zaś g będzie się barziej zbliżać do k , tem punkta F, G , padną bliżej środka, i kiedy $g = k, f = 0$, zrównanie zaś (A) stanie się $y^2 = g^2 - x^2$ zrównaniem na koło; podług więc większej lub mniejszej odległości punktów F, G , od środka S , którą to odległość nazywać będziemy Mimo-środek (Excentricitas); Ellipsa oddala się lub zbliża do koła. Starajmy się nałamprzód poznać własności Ellipsy przez linie wychodzące z ich ognisk i środka. Ponieważ $SF = \sqrt{g^2 - k^2}$, $PF = \sqrt{g^2 - k^2} - x$, $FM^2 = y^2 + [\sqrt{g^2 - k^2} - x]^2$, gdzie za y włożoną wartość z zrównania (A), uczyni $FM = g - \frac{x\sqrt{g^2 - k^2}}{g}$;

$GM = g + \frac{x\sqrt{g^2 - k^2}}{g}$, a przeto $FM + GM = 2g = AB$;

to jest: Ze summa linii z ognisk do iakiegokolwiek punktu Ellipsy prowadzonych, jest równa osi większej. PIERWSZA WŁASNOŚĆ ELLIPSY.

Poprowadźmy do tego samego punktu M styczną MT : §. 12. nauczył nas, że $SP:SA::SA:ST$, to jest,

$$ST = \frac{g^2}{x}; \quad GT = \frac{g^2 + x\sqrt{g^2 - k^2}}{x}, \quad FT = \frac{g^2 - x\sqrt{g^2 - k^2}}{x}$$

stawiając wartości na FT, FM, GT, GM , otrzymamy:

$$FT:FM = g:x \quad - \quad GT:GM = g:x \quad \text{więc}$$

$$FT:FM = GT:GM \quad \text{to jest:} \quad \frac{W\beta.FMT}{W\beta.ETM} = \frac{W\beta.GMQ}{W\beta.FTM}$$

$W\beta.FMT = W\beta.GMQ$? czyli dwie linie proste z ognisk do któregośkolwiek punktu Ellipsy prowadzone, równo są nachylone do styczney tego punktu. DRUGA WŁASNOŚĆ ELLIPSY.

Aże znowu $GT:GM = g:x$; $ST:SA = g:x$ - - -
 $GT:GM = ST:SA$, poprowadziwszy zaś z środka S ,

D4

SR

SR równo-ległą GM, trójkąty GMT, SRT, dadzą GT: GM=ST:SR, a przeto SR=SA, znajdziemy przez podobne rozumowanie SQ=SR=SA, to jest: że linie, s

środek do stycznię prowadzone równo-ległe liniom

wychodzącym z ognisk, są sobie, i połowie osi większej

równe: tak dalece: że FM+GM=SR+SQ=AB. TRZECIA WŁASNOŚĆ ELLIPSY.

Starajmy się teraz wynaleść wartość na TM przez funkcją ilości wchodzących w zrównanie na Ellipsę. Ponieważ $ST = \frac{S^2}{x}$, $PT = \frac{S^2 - x^2}{x}$; włoży-

wszy wartość licznika wyciągnią z (A), otrzymamy $PT = \frac{y^2 S^2}{k^2 x}$, a przeto $TM = \sqrt{(TP^2 + PM^2)} =$

$\frac{y \sqrt{(k^4 x^2 + S^4 y^2)}}{k^2 x}$; zrównanie zaś (A) na Ellipsę daie

$S^4 y^2 = k^2 S^4 - k^2 S^2 x^2$; eo włożywszy w wartość na

styczną; otrzymamy $TM = \frac{y}{kx} \sqrt{[S^4 - x^2 (S^2 - k^2)]} =$

$\frac{y}{k} \sqrt{(FT \cdot GT)}$; skąd $GT = \frac{TM^2 \cdot k^2}{FT \cdot y^2}$; $PT = \frac{y^2 \cdot ST}{k^2}$; prze-

to $GT = \frac{TM^2 \cdot ST}{PT \cdot FT}$; mamy zaś s podobieństwa trójkątów TG:TS=TM:TR . . $TR = \frac{TM \cdot TS}{GT}$, włożywszy

za GT wartość dopiero znalezioną, wypadnie . .

$TR = \frac{FT \cdot PT}{TM}$, to jest: TM:PT=FT:TR, więc trójkąty

PMT, RFT, są sobie podobne, i kąt FRT jest kątem prostym: przez tenże sam sposób dojdziemy że i kąt GQT jest prostym. Ta własność uczy nas wynajdować geometrycznie obydwie ogniska w Ellipsie mając środek i styczną: poprowadziwszy bowiem z środka S, do stycznię linie SR, SQ, sobie i połowie osi

osi większy równy, potem s punktów R, Q, spu-
ściwszy dwie pionowe, te przędą koniecznie przez
ogniska F, G; co czyni CZWARTĄ WŁASNOŚĆ ELLIPSY.

Równamy teraz trójkąty podobne FRT; PMT;
SQT; dla wynalezienia wartości na FR, GQ, będzie
naprzód:

$$TM:PM=FT:FR \quad \text{--} \quad FR=\frac{FT.y}{TM}$$

$$TM:PM=TG:GQ \quad \text{--} \quad GQ=\frac{TG.y}{TM}$$

w te ostatnie zrównania włożywszy wartość wyżej
znaleziona na TM, wypadnie $FR=k\sqrt{\frac{FT}{GT}}$ - - - -

$GQ=k\sqrt{\frac{GT}{FT}}$, a przeto $FR.GQ=k^2=CS^2$ to jest: że

oś mniejsza Ellipsy jest średnią proporcjonalną mię-
dzy dwiema pionowymi spuszczone mi s styczney do
ognisk. PIĄTA WŁASNOŚĆ ELLIPSY.

Ieżeli iefzcze s środka spuszczyemy na styczną,
pionową SL, ta naprzód rozdzieli trójkąt SRQ na
dwa równo-boczne, i równo-kątne podług własności
III: powtóre uczyni trójkąt STL podobny każdemu
s trzech uważanych w poprzedzających własności:
przeto

$$FT:FR=ST:SL \quad \text{--} \quad SL=\frac{ST.FR}{FT}=\frac{k.ST}{\sqrt{FT.GT}}, \text{ po-}$$

przedzającą zaś własność dała $FR=\frac{k.FT}{\sqrt{FT.GT}}$, prze-

to $SL-FR=\frac{k.SF}{\sqrt{FT.GT}}=SN$, s kąd otrzymamy:

$$SL+SN=\frac{k.GT}{\sqrt{(FT.GT)}}, \quad SL-SN=\frac{k.FT}{\sqrt{(FT.GT)}}, \text{ a prze-}$$

to $SL^2-SN^2=k^2=SC^2$, - - $SN=\sqrt{(SL^2-SC^2)}$, zró-
wnanie na wynalezienie punktu N, s którego spu-
szczoną linią pionową FN, przędzie przez ognisko.

D₅

Gdy-

Gdybyśmy punkt P przenieśli do ogniska; a punkt M , na przystawę pionową wychodzącą z F ; byłoby $x = \sqrt{g^2 - k^2}$; $x^2 = g^2 - k^2$, co włożywszy w zrównanie

(A) na Ellipsę, otrzymamy $y = \frac{k^2}{g}$, wartość

na LINIĄ RÓWNAŃ (Parameter). Ta linia daie nam związek obydwóch osi w Ellipsie, które są jej średnicami razem: własność II. Ellipsy odkryta nam znowu związek między AS , FM , GM ; mając zaś na pamięci §§. 10. 11. możemy ten związek przenieść do innych średnic jakichkolwiek. A naprzód wiemy z własności ogólnych linii 2go porządku, że połącznawszy z środka do punktu M linią SM , i tę wzięwszy za średnicę; linią SK równoległą styczney TM , będzie jej średnicą sprzężoną. Nazywam $SM = p$, $SK = q$, kąt $KSM = \phi$, mamy s. 11.

$p^2 + q^2 = g^2 + k^2$; z §. 10. zró. (3) $gk = pq \cdot \cos \phi$

że $p^2 = x^2 + y^2 = k^2 + \frac{(g^2 - k^2)x^2}{g^2}$; $q^2 = g^2 + k^2 - p^2 =$

$g^2 - \frac{x^2(g^2 - k^2)}{g^2} = FM \cdot GM$, znajdziemy przez podobne rozumowania że $p^2 = FK \cdot GK$, to jest: że średnica każda w Ellipsie, jest średnią proporcjonalną między dwoma liniami wychodzącymi z ognisk do punktu jej średnicy sprzężonej na Ellipsie. SZOSTA WŁASNOŚĆ ELLIPSY.

Aże pod właf. I. H. $FM \cdot GM = \frac{x^2}{g^2} FT \cdot GT$, przeto

$SK = q = \frac{x}{g} \sqrt{FT \cdot GT}$. Związek współ-ufzykowanych w zrównaniu na Ellipsę (A) , wyrażony jest

przez funkcją dwóch osi SA , SC ; mając teraz wyraz osi nowych SM , SK , przez pierwić; nie będzie nam trudno wynaleźć wartości x , y , przez funkcją SM , SK ; stąd zaś wyciągnąć wartość na KL równoległą

ległą MP. Pamiętajmy tylko że $TM = \frac{y}{k} \sqrt{FT \cdot GT}$;

$PT = \frac{y^2 g^2}{k^2 x}$, i że trójkąty TMP, SKI, są sobie podobne: przeto

$$TM:MP = SK:KI \quad \text{KI} = \frac{SK \cdot y}{TM} = \frac{kx}{g}$$

$$TM:TP = SK:SI \quad SI = \frac{SK \cdot TP}{TM} = \frac{gy}{k}$$

skąd wypada. $KI \cdot SI = xy = SP \cdot PM$: to jest: że do dwóch punktów Ellipsy leżących na średnicach sprzężonych poprowadziwszy współ-uszukowane, mnogość iednych, jest równa mnogości drugich, czyli przyślawy są w stosunku spaczynym do odcinków. SIODMA WŁAŚNOŚĆ ELLIPSY.

Wróciwszy się do zrównań pod własnością VI, $p^2 = k^2 + \frac{(g^2 - k^2)x^2}{g^2}$, $p^2 = x^2 + y^2$, wyciągniemy pierwiżego $x = \frac{g \sqrt{(p^2 - k^2)}}{\sqrt{(g^2 - k^2)}}$, z drugiego $y = \frac{k \sqrt{(g^2 - p^2)}}{\sqrt{(g^2 - k^2)}}$, a przeto $KI = \frac{kx}{g} = \frac{k \sqrt{(p^2 - k^2)}}{\sqrt{(g^2 - k^2)}}$, $SI = \frac{gy}{k} = \frac{g \sqrt{(g^2 - p^2)}}{\sqrt{(g^2 - k^2)}}$, skąd poznamy kąty PSM, KSI, w funkcjach famyich osi.

Zostawiliśmy na końcu §. 12. zrównanie (Aa) na wszystkie linie 2go porządku, chciemy ie teraz przyśłowac do Ellipsy, tak aby w nie żadne inne ilości sfateczne nie wchodziły prócz osi więkfszy g, i mimo-śrzedu FS, który nazwiemy m, należy pám wię c, d, w zrównaniu (Aa) będące wyrazić przez g, m; aże $c = \frac{k^2}{g}$, $m^2 = g^2 - k^2$; przeto $c = \frac{g^2 - m^2}{g}$, $d = g - m$, włożywszy te wartości za c, d, w zrównanie (Aa), wypadnie:

Dσ

r=

Zrównanie biegunowe na Ellipsę.

$$r = \frac{g^2 - m^2}{g - m \cos t \cdot v} \quad (Ab)$$

Zrównanie (Ab) na Ellipsę zamyka dwie ilości odmienné, r i kąt v ; co nas prowadzi do rozleglyszego poznawania linii krzywych, w których nie tylko dwie linie proste któreśmy wśpół-użytkowanemi nazwali, byż mogą ilościami odmiennemi i wyrażać naturę linii krzywéy; ale nawet i kąty. Takową linii krzywych uwaga wielkiego w mechanice użycia, odmienia całe postać zrównania, i wyciągać po nas będzie osobnego rostrząsania.

Wróćmy się ieszczé do dawnego stanu Ellipsy, a chcąc początek odcinków s śródku S przenieść do wierzchołka A , potrzeba nam położyć w zrównaniu (A), $g - x$ za x ; a przez tę sztukę zamienimy ie na $y^2 = \frac{k^2}{g^2} (2gx - x^2)$, nazwiemy linia równania $\frac{k^2}{g} = f$, odległość $AF = d$, będzie $d = g - \sqrt{g^2 - gf}$, rozwiązawfzy to zrównanie otrzymamy $g = \frac{d^2}{2d - f}$;

$k = \sqrt{fg} = d \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{2d - f}}$; gdzie $2d > f$, z natury Ellipsy; włożywfzy za g , k , dopiero znalezione wartości, otrzymamy zrównanie na Ellipsę.

$$y^2 = 2fx - \frac{(2d - f)f \cdot x^2}{d^2} \quad (A').$$

gdzie wierzchołek linii krzywéy iest początkiem odcinków.

§. XIV.

Parabola i iey
właściwości

Przystąpmy iuż do wprowadzenia nowego warunku w zrównanie $y^2 = n + px + qx^2$, to iest uczyńmy $q = 0$, a zrównanie $y^2 = n + px$, wyrazi nowy gatunek linii 2go porządku; którego chcąc poznać ryfunek wyrzucmy n , czyli położmy za x , $x = \frac{n}{p}$; a zamié-

zamieniemy je na $y^2=px$, $y=\pm\sqrt{px}$, ponieważ x jest stopnia nieparzystego, wszystkie jego wartości dodatnie uczynią y rzetelnym, to jest wszystkie wzrosły x , które się tylko pomyśleć mogą, byleby były dodatnie, dadzą na y dwie wartości rzetelne równe; linia więc tem równaniem opisaną rościagnie dwie odnogi bez końca w tę stronę, gdzie odcinki przypadają dodatnie, i os przedzielać ją będzie na dwie części równe. Taką linią wystawia nam fig. 25. gdzie os AB pociągnie się z odnogami linii krzywey w odległość nieskończoną: biorąc zaś w równaniu $y=\pm\sqrt{px}$, x odjemnie; y na każdą takową wartość będzie uroionem, przeto linia krzywa od początku odcinków A , ku T nigdzie się nie pociągnie, a jeżeli os większą jest nieskończoną, mimo-szród, który jest funkcją tej osi podług §. 12, będzie także nieskończenie odległy, i os mniejszą przechodzącą przez szrodek także nieskończoną. Linią ta krzywa nazywa się PARABOLA (Parabola) mającą dwie odnogi nieskończone na stronie odcinków dodatnich, szrodek, a przeto osi obydwie bez końca.

Fig. 25

Jeżeli w równaniu (A') na Ellipsę, uczyniemy $2d-f=0$, to zamieni się na równanie $y^2=2fx$ wyrażające Parabolę: uczyniwszy zaś $2d-f=0$, wprowadzamy kondycją istotną Paraboli, to jest $2d=f$, czyli: że w Paraboli przysławia przechodzącą przez ognisko, czyli miara równania jest dwa razy większą odległość tegoż ogniska od wierzchołka. Aże drugie ognisko przypadałoby powinno z drugiej strony szrodka, który jest nieskończenie odległy, Parabola więc nie ma tylko jedno ognisko, i w niem $FL=2AF$.

PIERWSZA WŁASNOŚĆ PARABOLI.

Jeżeli $AP=x$, $PM=y$, $y^2=2fx=2FL\cdot AP$, $FP=x-\frac{1}{2}f$; więc $FM^2=y^2+x^2-fx+\frac{1}{4}f^2$; $FM=x+\frac{1}{2}f=AP+\frac{1}{2}f$.

DRUGA WŁASNOŚĆ PARABOLI.

Ta własność Paraboli podaie nam barzo łatwy sposób znalezienia icy punktów geometrycznie: jeżeli bowiem

bowiem $FM = AP + AF$, na osi AB poprowadziwszy równo-ległe MPM' , i na każdy odcinek ryfując łuk koła którego promień $= AP + AF$, gdzie te łuki przeczną linie równo-ległe MPM' tam będą punkta Paraboli.

Poprowadziwszy do punktu M , styczna MT , punkt T oznaczemy z własności ogólnej na linie 2go porządku, jest bowiem $BT = \frac{g^2}{x}$ rachując odcinki s

środką; biorąc ie zaś za wierzchołka A , trzeba za x położyć $g - x$; więc $BT = \frac{g^2}{g - x}$, $AT = \frac{g^2}{g - x} - g =$

$$\frac{gx}{g - x}; \text{ aże } g = \frac{1}{2}, \quad g - x = g, \text{ więc } AT = x = AP.$$

TRZECIA WŁASNOŚĆ PARABOLI.

Ponieważ $FT = AT + AF = AP + AF = FM$, trójkąt FTM jest równoramienny, i kąt $TMF =$ kątowi MTF

przeto $MFP = 2MTF$, $\text{Sty. } MTP = \frac{y}{2x}$, $\text{Sty. } 2.MTP =$

$$\text{Sty. } MFP = \frac{y}{2x - f} = \frac{\sqrt{2fx}}{2x - f}; \text{ i znowu } FT \text{ będąc } = FM,$$

prosto-padła FS z ogniska na styczną rozdzieli TM na dwie części równe: powtóre AT będąc równe AP , pionową AS rozdzieli także TM na dwie części równe, więc punkt S jest spólny dwóm pionowym AS , FS . S tych własności wypada; $TM = \sqrt{4x^2 + 2fx} =$

$$2\sqrt{[x(x + \frac{1}{2}f)]} = 2\sqrt{(AP.FM)}, \quad TS = \sqrt{(AP.FM)} = \sqrt{(AT.FT.)}$$

z własności zaś trójkątów mamy:

$$AS.TS = AF.FS \quad \dots \quad AF.AS = AS.AP.$$

$$FS = \frac{AF.TS}{AS} = \frac{AF.TS}{\sqrt{(AF.AP)}} = \sqrt{(AF.FM)}. \text{ CZWAR-}$$

TA WŁASNOŚĆ PARABOLI.

Spuściwszy na styczną prosto-padłą MW , mamy

$$PT.PM::PM:PW \quad \dots \quad PW = \frac{y^2}{2x} = \frac{2fx}{2x} = f, \text{ więc}$$

$$FW = FL = 2AF, \text{ a przeto } FW = AP - AF + AF = AP + AF =$$

$MF=FM=FT$; PIĄTA WŁASNOŚĆ PARABOLI.

Prowadźmy od M równo-ległą osi MN , i przeciągniemy styczną do X , ponieważ własność V. uczy nas że kąt $FMW =$ kątowi FWM ; $PMN = TNW = 90^\circ$. odcinając od każdego WMN , wypada kąt $NMX =$ kątowi FMT . wszystkie więc linie równo-ległe osi padając na Parabolę i odbijając się pod kątem równym do stycznej, zniędą się w ognisko.

Przystępujemy teraz zrównanie Biegunowe (Aa) do Paraboli, którego już niemożemy przez funkcją osi i mimo-środku wyrazić, dla tego że obydwie te linie są nieskończone w Paraboli, możemy je atoli wyrazić albo przez linią równania, albo przez odległość ogniska od wierzchołka. Ze zaś w paraboli

$d = \frac{c}{2}$ zrównanie biegunowe będzie:

$$r = \frac{zd^2}{d + d \cos t.u}, \text{ albo } r = \frac{c^2}{c + c \cos t.u} \quad (Ac).$$

§. XV.

Został nam jeszcze jeden warunek do wprowadzenia w zrównanie $y^2 = n + px + qx^2$, to jest żeby q i n były własności. było ilością koniecznie dodatnią, skąd nam wypadną powinién trzeci gatunek linii 2go porządku. Dla poznania ryfunku téj nowéj linii krzywéj, wyrzucmy drugi termin s tego zrównania, czyli odniéśmy odcinki do środka, wzięwszy $x = x - \frac{p}{2q}$, a zaś

$n - \frac{p^2}{4q} = -a$, zrównanie podane stanie się:

$$y^2 = qx^2 - a.$$

piérwszą uwagą nad tém zrównaniem przekonywamy nas, że a będąc odjemnem, uczyniwszy $x = 0$, y stanie się uroioném, to jest że linia krzywá, nie przejdzie tam, gdzie przypada iey środek: biorąc potem za x wartości mniejsze od $\sqrt{\frac{a}{q}}$, ieszcze y nie prze-

stanie

stanie byżł uroioném: kiedy $x = \pm \sqrt{\frac{a}{q}}$, $y = 0$, to ieřł

że dopiero w odległoości $\sqrt{\frac{a}{q}}$ od řrózodka, linią krzy-

wą przeciawřzy oś, zacznie się z dwóch řtron, to ieřł w řtronie odcinków dodatnych i odiemnych; będzie się więc znaydować rozerwana w dwóch mieřłscach, tak dalece: że obrawřzy na fig. 26 C za řrózodek,

Fig. 26,

uczyniawřzy $CA = CB = \sqrt{\frac{a}{q}}$, linią krzywą zacznie się

przy A, i B, w řadném zaś mieřłscu przy linii AB, nie będzie przechodzić: przelzedłřzy za A i B wřzy-

řłkie wårtości na x będą większe od $\sqrt{\frac{a}{q}}$, aże takie

wårtości bądź dodatne bądź odiemne, uczynią pierwiastki zrównania zawsze rzetelnými, i nie odmieniają nic w ich wyrazie dla potęgi x pårzyřłtey, przeto linią krzywą począwřzy ad A i odwróciwřzy się od řrózodka rościagnie dwie odnogi bez końca: toż łamo przytrafi się u B; na każdą bowiem wårtość dodatną x , będą odpowiadać dwie wårtości y równe, i na każdą wårtość odiemną, dwie takież: linią więc krzywą będzie miała cztery odnogi nieřkończone, to ieřł dwie na odcinki dodatne odpowiadające przyřławom dodatnym i odiemnym; i dwie na odcinki odiemne, naznaczone także łwoiakimi przyřławami. Jedna pąra takowych odnóg będzie oddzieloną od drugiej linią AB; ieżeli tę linią weźmiemy za oś, a razem za řrzednicę iako przechodzzącą przez řrózodek, będzie $CA = \sqrt{\frac{a}{q}} = g$; $a = qg^2$, i zrównanie na

linią którą nazwano *Hyperbola* będzie:

$$y^2 = q(x^2 - g^2).$$

Zątrzymámy się teraz nąd pierwiastkowém przyřłuczeniem, zbliżywřzy te rozumowania, które nám służyły do poznania ryřunku w Ellipse. Wzięłřmy w pierwřłzem

w pierwszym zrównaniu a za odjemne, i uczyniwszy $x=0$, wypadło y uroione, ale że w Ellipse i w każdej linii 2go porządku biorąc środek za początek odcinków, na $x=0$, otrzymaliśmy zawsze wartość drugiej średnicy czyli osi mniejszej, takową oś iak widzimy jest uroioną w Hyperboli, czyli przez te miejsca gdzie oś poprzeczna przypada, Hyperbola nie przechodzi; gdybyśmy byli wzięli a za dodatnie; na $x=0$, otrzymalibyśmy byli y rzetelne, ale na $y=0$, byłoby wypadło x uroione, to jest Hyperbola znajdowałaby się była na linii RS, a oś AB byłaby była została uroioną. S tęg uwagi wypada: *naprzód* że w Hyperboli jedna oś jest koniecznie uroioną *powtórę*, że którąkolwiek s tych osi weźmiemy za uroioną, linią krzywą odmieni swoje położenie, ale nie odmieni w swojej naturze i właściwościach; *potrzebie* że to położenie Hyperboli zawisło od a , biorąc ie za dodatnie lub odjemne.

Wprowadziwszy tę własność służącą samej Hyperboli, to jest: że oś mniejsza k , jest uroioną $k\sqrt{-1}$, w zrównanie na Ellipse, kładąc $-k^2$ za k^2 , zamiast niemy ie na zrównanie wyrażające Hyperbolę:

$$y^2 = \frac{k^2}{g^2}(x^2 - g^2) \quad (B)$$

co właśnie zgadza się s tęg pierwiastków uroionych tłumaczeniem, któreśmy w Algebrze pod §. 15 wyłożyli: oś bowiem uroioną, pokazuje nam tylko, że żaden ie punkt nie należy do linii krzywej, ale będąc linią oderwaną od odnogi, wyrażać może barzo dobrze stófunki i właściwości linii na tych odnogach zostających, a przeto może zastępować w zrównaniu miejsce ilości statecznych. Iakoż przez tęg wprowadzony warunek, możemy wszystkie właściwości Ellipsy przerobić na właściwości Hyperboliczną, byleby tęg były funkcjami osi. Odległość n.p. ognisk w Hyperboli $= \pm\sqrt{g^2 + k^2}$, będąc wyrazem rzetelnym, dowodzi że w Hyperboli są dwa ogniska F, G, tak iak w Ellipse: to jest prowadziwszy przez środek

dek linią pod kątem, którego dostawa równa jest pół-osi g , i na tę z ogniska spuściwszy pionową, przeciw-prosto-kątną tego trójkąta wyrazi nam geometrycznie odległość ogniska od środka $CF = \sqrt{(g^2 + k^2)}$; ponieważ $CP = x$, $PM = y$, $FP = x - \sqrt{(g^2 + k^2)}$,
 $GP = x + \sqrt{(g^2 + k^2)}$; $FM^2 = FP^2 + PM^2 = \frac{(g^2 + k^2)x^2}{g^2}$

$$- 2g^2x\sqrt{(g^2 + k^2)} + g^4, \text{ czyli } FM = \frac{x\sqrt{(g^2 + k^2)}}{g} - g;$$

podobnie znajdziemy $GM = \frac{x\sqrt{(g^2 + k^2)}}{g} + g$, a prze-

to - - $GM - FM = 2g$, to jest: iak w Ellipsie summa, tak w Hyperboli różnica linii z ognisk do iakiegokolwiek punktu M prowadzonych, jest wyrazem stałym i równym osi większej AB . PIERWSZA WŁAŚNOŚĆ HYPERBOLI.

Chcąc prowadzić styczną MT , a przeto oznaczyć punkt T , mamy naprzód z §. 12. $CT = \frac{g^2}{x}$, $PT = CP$

$$- CT = \frac{x^2 - g^2}{x} = \frac{y^2 g^2}{k^2 x}; \quad FT = \frac{x\sqrt{(g^2 + k^2)} - g^2}{x};$$

$$GT = \frac{x\sqrt{(g^2 + k^2)} + g^2}{x}; \text{ przypatrzwszy się warto-}$$

ściom wyżej znalezionym na FM , GM , i porównawszy je z FT , GT , wypadnie:

$FT:FM = g:x$ - - $GT:GM = g:x$ - - $FT:FM = GT:GM$:
to jest: $W\beta.FMT:W\beta.FTM = W\beta.GMT:W\beta.FTM$, więc
 $W\beta.FMT = W\beta.GMT$. czyli: styczna do iakiegokolwiek punktu M , dzieli kąt zawarty między dwiema liniami z ognisk do tegoż punktu prowadzonymi, na dwa kąty równe. DRUGA WŁAŚNOŚĆ HYPERBOLI.

Wartość znalezioną na PT ; i wyciągnioną z (B) na PM , da nam poznać MT iako przeciw-prosto-kątną trójkąta TPM : otrzymamy bowiem

$$MT = \frac{y\sqrt{(k^4 x^2 + y^2 g^4)}}{k^2 x} = \frac{y\sqrt{[(k^2 + g^2)x^2 - g^4]}}{kx} = \frac{yg}{kx} \sqrt{(FM)}$$

$\sqrt{(FM.GM)}$. Popuszczając na styczną MT' przeciągniętą z środka i obudwóch ognisk pionową CQ , FH , GK , podobieństwo trójkątów daie nam:

$$TM:TP::CT:TQ \quad - - \quad TQ = \frac{TP.CT}{TM} = \frac{g^2 y}{kx \sqrt{(FM.GM)}};$$

$$TM:MP::CT:CQ \quad - - \quad CQ = \frac{CT.y}{TM} = \frac{g^k}{\sqrt{(FM.GM)}};$$

$$TM:PT::FT:TH \quad - - \quad TH = \frac{FT.PT}{TM} = \frac{g^2 y.FM}{kx \sqrt{(FM.GM)}};$$

$$TM:PM::FT:FH \quad - - \quad FH = \frac{FT.PM}{TM} = \frac{k.FM}{\sqrt{(FM.GM)}};$$

$$TM:PT::GT:TK \quad - - \quad TK = \frac{GT.PT}{TM} = \frac{g^2 y.GM}{kx \sqrt{(FM.GM)}};$$

$$TM:PM::GT:GK \quad - - \quad GK = \frac{GT.PM}{TM} = \frac{k.GM}{\sqrt{(FM.GM)}};$$

skąd wypadá $FH.GK=k^2$ tak iak w Ellipcie pod własn. 5. powtóre $TH.TK = \frac{g^2 y^2}{k^2 x^2} = CT.TP$, to iest:

$$TH:CT::TK:TP. \text{ Pociągnąwszy linią } CH, \text{ i podobną sobie wyobraziwszy } CK, \text{ znaydziem że } QH=QK=$$

$$\frac{TH+TK}{2} = \frac{gy \sqrt{(g^2+k^2)}}{k \sqrt{(FM.GM)}}; \text{ stąd zaś } CH^2=CQ^2+QH^2$$

$=g^2$, $CH=g$, znowu iak w Ellipcie pod własn. III. to iest: $CH+CK=GM-FM=AB$, znaydziemy ieszcze

$$CQ+HF = \frac{kx \sqrt{(g^2+k^2)}}{g \sqrt{(FM.GM)}}; \text{ a przeto, } (CQ+FH)^2 -$$

$CQ^2=k^2$, to iest: $CX=\pm \sqrt{(k^2+CQ^2)}$ na oznaczenie ognisk w Hiperboli.

Widzemy więc oczywiście, iż uważane dotąd własności Hiperboli są tey z Elliptą spólne, tak dalece, że Hyperbola uważać się może iako Ellipta rozerwana i odwróconá od osi mnieyszey. Nim przystąpimy do właściwszych charakterów téy linii krzywéy, przeróbmy do niey zrównanie biegunowe §. 12. Mamy zaś

my zaś w Hyperboli odległość wierzchołka od ogniska $d=m-g$; linią porównania $c=\frac{k^2}{g}=\frac{m^2-g^2}{g}$, a włożywszy te wartości w zrównanie (Ad) §. 12. wypadnie na Hyperbole.

$$r=\frac{m^2-g^2}{g+m\text{Dofst.}u} \quad (Ad).$$

§. XVI.

Hyperbola nie
dzy ledwo nie
styczna, i
jej własności

Kiedy linie proste z ognisk Hyperboli wychodzące przywiodły nas do własności takich, jakieśmy dostrzegli w Ellipse; zastanówmy się nad własnościami jej stycznych, które nas może nauczą znakomitszych charakterów Hyperboli. Odległość od tego punktu, gdzie styczna przecina oś wypadła nam z §. 12.

$$CT=\frac{g^2}{x}, \text{ CT będąc całkiem zawisłe w swych odmianach od } x;$$

Fig. 26.

nie może się inaczej zmniejszać, tylko kiedy się x powiększa, to jest punkt T na fig. 26. nie może się zbliżać do środka, tylko kiedy się odcinek CP od niego oddala, pośluwając P , a z niemi punkt M przez wszystkie odmiany wzrastając x , iakózkolwiek zmniejszać się będzie CT , nigdy punkt T nie padnie na C , i nigdy TM nie przestanie być styczną, poki linia krzywa zostawieć będzie przy swoich istotnych własnościach, to jest poki zrównanie na Hyperbole nie odmieni w swoim związku istotnego. Tu pamiętni na początki §. 16. Algebry, widzimy oczywiście, że CT ubywając zbliża się do swojej granicy 0, a z niemi $CP=x$ wzrastając do granicy ∞ , ale obydwie te ilości nigdy swych granic nie dosięgną, poki natura linii krzywej zostanie ta sama. Wystawie sobie CT , i CP u swoich granic, jest to jedno co wystawie sobie że linia krzywa, i jej styczna TM odmieniły swój istotny charakter, i przestały być tym, czem są teraz; ale razem jest to sobie wystawie że linia krzywa i jej styczna mają za granice swych odmian inne linie, do których się
coraz

coraż barziej zbliżają, i w które się zamieniają, kiedy punkt T padnie w środek, chcąc takowe granice poznać, wprowadźmy warunek, na to potrzebny, to jest: że $x = \frac{1}{g}$, czyli że x doszło do tego stanu, w którym żadna ilość skończona nie może go ani zmniejszyć ani powiększyć, CT będzie $= 0$, a linią TM ciągnąć się nad odnogą Hyperboli, i zbliżając się coraż barziej do niej, nigdy się linii krzywéj nie dotknie, chyba w oległości nieskończonej, to jest kiedy Hyperbola przestanie być Hyperbolą, i zamieni się na linią innéj natury do której się iako do swéj granicy zbliżała. Takową linią ciągnącą się bez końca nad odnogą Hyperboli maluje nam CX na fig. 27. którą nazywać będziemy LEDWO-NIESTYCZNĄ linią krzywéj (*Asymptota curvae*). Naturę takowéj ledwo-niestycznej CX wyciągniemy z zrównania (B) na Hyperbolę, uczyniwszy w niem $x = \frac{1}{g}$, a przeto zmazawszy wszystkie ilości stateczne dodane lub odciągnięte, które przed x nikną. Tym sposobem zrównanie (B) zamieni się na $\frac{y}{x} = \pm \frac{k}{g}$, które wyraża

Fig. 27.

żá dwie linie proste CX , CZ , to jest na y dodatné i odjemné odpowiadające odcinkóm dodatnym, i znowu CW , CU odpowiadające x odjemnym, ciągnące się po nad drugimi dwiema odnogami Hyperboli. Aże wprowadziwszy $x = \frac{1}{g}$ w zrównanie (B), odnieśliśmy Hyperbolę do tego mieysca, w którym się linia CX zetknie z Hyperbolą, to jest gdzie punkta Hyperboli zmieszają się s punktami linii prostej CX , i linią krzywą zamieni się na ledwo-niestyczną wyrażoną zrównaniem $\frac{y}{x} = \pm \frac{k}{g}$. Przypadek tén szcze-

gólny, na który nás własności Hyperboli naprowadziły, ogarniając ogólniejszym sposobem, widzemy, naprzód: że linie krzywé mając odnogi nieskończone zbliżają się swym wzrostem do innego rodzaju linii iako do swych granic; powtóre że takowe granice

E₃

linii

linii krzywych wypadają z ich zrównań, uczyniwszy współ-ufzykowane nieskończonemi; przez co zmniejszywszy liczbę terminów w zrównaniu podanem, zamieniamy związek służący linii krzywę, na związek wyrażający naturę ledwo-nieftyczną. Linie więc krzywę naturą między sobą różne, różnić się iefzcze mogą przez granice, do których się zbliżają, a przeto nowe ich własności wypadź mogą s porównania ich co do granic. Nim nową tę teorią ogólniey rostrząsać nam przydzie, zatrzymamy się nad własnościami Hyperboli położoney między ledwo-nieftycznemi, a uwagi teraznięsze służyć nam będą za wzór do przyfzłych docieków.

Kiedy zrównanie (B), zamieni się na $\frac{y}{x} = \frac{k}{g}$,

Fig. 27. punkt M fig. 27. zniydzie się s punktem X, i $\frac{y}{x}$ wy-

rażać będzie ftyczną kąta PCX: u wierzchołka więc A poftawiwszy pionową AD, będzie ftyczna ACD=

$$\frac{AD}{CA} = \frac{k}{g} = \frac{y}{x}, \text{ a przeto } k=AD, CD=\sqrt{g^2+k^2}=CF;$$

ftyczna z ACD=Sty. DCE= $\frac{zkg}{g^2-k^2}$, (§. 54. Alg.), gdy-

by więc było AD=AC, Sty. ACD=1=Sty. 45°; Sty. DCE= $\frac{1}{2}$, to ief, kąt między ledwo-nieftycznemi zawarty byłby kątem proftym, i takowā Hyperbola nazywā się Równoboczną (Hyperbola Aequilatera), na którą zrównanie $y^2=x^2-g^2$; CD=CF=kV 2.

Wróćmy się do pierwſzego gatunku Hyperboli między ledwo-nieftycznemi, gdzie $g>k$, ponieważ PX= $\frac{kx}{g}$, CP=x, CX= $\frac{x\sqrt{g^2+k^2}}{g}$ = FM+AC=GM-AC;

będzie MX=PX-PM=ZN= $\frac{kx-gy}{g}$; NX=PX+PM

$$= \frac{kx+gy}{g} = MZ; XM.XN = \frac{k^2x^2-g^2y^2}{g^2}, \text{ włożywszy za}$$

za g^2y^2 wartość wyciągniętą z równania (B); otrzymamy $XM.XN=ZN.ZM=k^2=AD^2$. PIERWSZA WŁASNOŚĆ HYPERBOLI MIĘDZY LEDWO-NIESTYCZNEMI.

Poprowadziwszy s punktu M, ML równoległą ledwo-niestycznę CZ; kąt LXM = kątowi LMX, przeto LM=LX, i trójkąt LXM ̣ trójkątowi DCE; skąd

$$DE:CE=XM:LM \quad - \quad LM=\frac{CE.XM}{DE}=\frac{(kx-gy)\sqrt{g^2+k^2}}{2kg},$$

$$CL=CX-LM=\frac{(kx+gy)\sqrt{g^2+k^2}}{2kg}; \quad CL.LM=$$

$$\frac{(k^2x^2-g^2y^2)(g^2+k^2)}{4k^2g^2}=\frac{k^2+g^2}{4}. \text{ to jest: że wzięwszy}$$

jedną ledwo-niestyczną za linią odcinków, i na tę prowadząc przystawy do iakiegokolwiek punktu Hyperboli równoległą drugiey ledwo-niestycznę, mnogość dwóch takowych współ-użykowanych jest funkcją nieodmienną. Z wierchołka więc A, pociągnąwszy AH równoległą CD, z własności trójkątów wypada CH=AH; aże CL.LM=CH.AH=AH², linia AH będzie niby linią porównania, której potęga druga równa się współ-użykowanym wspomnionym na iakikolwiek punkt Hyperboli. DRUGA WŁASNOŚĆ HYPERBOLI MIĘDZY LEDWO-NIESTYCZNEMI.

Ponieważ CH=HE= $\frac{1}{2}\sqrt{g^2+k^2}$ =AH, nazwawszy tę linią iako stateczną a, przytym CP'=x, P'M'=y; z własności drugiey wypada nam równanie na Hyperbolę między ledwo-niestycznemi $yx=a^2$ -- (C). gdzie przytawia będąc równoległą CX, nie przecina tylko w jednem miejscu linią krzywą. Chcąc ieszcze dostać ogólniejszego równania na Hyperbolę między ledwo-niestycznemi, czyli chcąc przytaw nie przywiezywać do żadnego warunku, biorę linią iakąkolwiek IK, i tę przez M' poprowadziwszy równoległą Q'M' przecinającą linią krzywą w dwóch punktach, nazywam CQ'=t, Q'M'=u, a podobieństwo trójkątów P'M'Q', CIK daie mi następujące proporcye:

EK

IK:

$$KI:CI::Q'M':P'Q' \dots P'Q' = \frac{u \cdot CI}{KI};$$

$$KI:CK::Q'M':P'M' \dots P'M' = \frac{u \cdot CK}{KI} = y.$$

Aże $CQ' = t = CP' + P'Q'$ - mamy $x = t = \frac{u \cdot CI}{KI}$, wio-

zywśmy te wartości za x, y , w równanie (C), otrzymamy:

$$u^2 - \frac{KI \cdot t}{CI} u + \frac{a^2 \cdot KI^2}{CK \cdot CI} = 0 \dots (D).$$

Pierwiastki tego równania są dwa przecięcia Hyperboli w punktach M', M ; aże linia KI jest nieodmienną równie iak CK, KI , bo nie leży na żadnym punkcie linii krzywej, idzie zatem, że mnogość dwóch przyśtaw należących do jednego odcinka zawartą w ostatnim terminie równania, jest funkcją

stałą, czyli $Q'M' \cdot Q'M = \frac{a^2 \cdot KI^2}{CK \cdot CI}$, TRZECIA WŁA-

SNÓŚ HYPERBOLI MIĘDZY LEDWO-NIESTYCZNEMI.

Drugi termin równania (D) będąc równy sumie pierwiastków daie nam $Q'M' + Q'M = \frac{KI \cdot t}{CI} =$

$Q'O$, skąd $OM = Q'M'$, gdy więc cięciwa $M'M$ stanie się styczną linii krzywej, n.p. VS punkt dotknięcia się F , przypadnie w samym środku linii VS ; aże podług własności III. mnogość dwóch przyśtaw do tegoż samego odcinka należących jest nieodmienną; równając takowe mnogości s styczną do linii krzywej równoległą wszystkim innym przyśtawom, wypadnie nam równanie $Q'M' \cdot Q'M = b^2$, gdzie b , znaczy przyśtawę dotykającą się linii krzywej, co nam pokazuje CZWARTĄ WŁASNOŚĆ HYPERBOLI MIĘDZY LEDWO-NIESTYCZNEMI.

Te ostatnie własności uczą nas sposobu prowadzenia stycznych do Hyperboli między ledwo-niestycznymi.

mi. Punkt bowiem dotykania się leży zawsze w środku linii do ledwo-niestycznych prowadzonej, s takiego punktu Y pociągnąwszy YT równoległą ledwo-niestyczny CW , podobieństwo trójkątów nas przekonywa, że jeżeli $VY = \frac{1}{2}VS$, musi także być $YT = \frac{1}{2}CV$, i $CT = \frac{1}{2}CS$, skąd łatwy sposób znalezienia punktu V , albo S , a przeto oznaczenia styczney. A jeżeli podług własn. II. $CT.TY = \frac{g^2+k^2}{4}$, kładąc za

$CT, \frac{1}{2}CS$; za $TY, \frac{1}{2}CV$; wypada $CS.CV = g^2+k^2 = CD^2$, to jest:

$$CS:CD::CE:CV,$$

równiając te boki z wstawami kątów im przeciwległych, znajdziemy, że kąt $CSD =$ kątowi CEV , i kąt $CDS =$ kątowi CVE , a przeto linie SD, VE są sobie równoległe. PIĄTA WŁASNOŚĆ HYPERBOLI MIĘDZY LEDWO-NIESTYCZNYMI.

Stawiwszy sobie przed umysł cały zbiór uwag te-
raźniejszy rozdziału, i upowszechniwszy niektóre
dostrzeżone własności, poznamy łatwo, co nam ie-
szcze do uważania w liniach krzywych pozostaie.
Uwagi ogólne nad zrównaniami zgo stopnia posłużyły
nam szczęśliwie do poznania wszystkich własności
linii zgo porządku. Te własności należą do trzech
rodzajów linii prostych mających swe punkta poło-
żone na linii krzywej, to jest: do cięciu, średnic, i
stycznych, z których dwie pierwsze przecinaiać linie
krzywe umieścić się mogą w iednej klasie, przywo-
dzając wszystkie własności do przecięć i stycznych.
Chcąc się trzymać téj saméj drogi w dociekanu przy-
miotów linii wyższych porządków, potrzebaby nam
bydź w stanie rozwiązania takdokładnie zrównać
wyższych stopni, iak stopnia zgo, od czego jesteśmy
ieszcze dalekiemi przez niedoskonałość Algebry.
Nie zostaie nam więc inną droga do przeniknienia w
rozległéjście własności linii iakichkolwiek porządków,
iak tylko upowszechnić tak daleko nalsze myśli i

Krótki zbiór
nauki całego
rozdziału od-
krywa nam po-
zostaie ieszcze
o liniach krzy-
wych docieka-
nia.

uwagi nad liniami krzywymi, aby ie uczynić niezawisłemi od rozwiązańi równań. Potrzeba nam więc teorią średnic i stycznych do takiej wynieść ogólności, aby ta niepotrzebowala innych pomocy Algebry, prócz ogólnych własności równań w Rozdziale III. Pierwszey Części Algebry wyłożonych. A ponieważ otrzymaliśmy dwoiakiego rodzaju styczne; jedne należące do punktów linii krzywey w odległości skończoney, drugie do punktów w odległości nieskończoney; te zaś ostatnie służąc tylko samym liniom krzywym odnogi bez końca mającym, mogą nas nauczyć o istotnym charakterze i podziale linii krzywych na te, które się w pewney rozległości zamykają, i te które się rościągają bez końca, wypadają nam naprzód stósować linie krzywe do ledwo-nie-stycznych, i wyciągnąć ogólne sposoby poznania ich odnóg; po czém przyśtapiemy do poznania rozlegleyszego teoryi stycznych w odległości skończoney, i wszystkich własności od niej zawisłych. Nakoniec zatrudniemy się rostrzafaniem przecięć w liniach iakichkolwiek porządków.

ROZDZIAŁ TRZECI.

Granice ilości CIĄGLE WZRASTAJĄCYCH odmienniejąc związki równań, prowadzą nas do poznania ODNÓG NIESKONCZONYCH w liniach krzywych, skąd wypadają podział linii w każdym porządku na rodzaje i gatunki: granice zaś ilości CIĄGLE UBYWAJĄCYCH odkrywają znakomitsze cechy ODNÓG SKONCZONYCH, i sposób równania wszystkich linii krzywych s kołóm.

§. XVII.

I dąc za ciągiem uwag wyłożonych w poprzedzających rozdziałach; nie możemy nie przyznać, że rozeznanie

zeznanie linii krzywych mających odnogi nieskończone, od tych które się w odległości skończonej zamykają, jest nągłówniejszym znamięm do poznania ich ryfunku. To zaś rozeznanie chcąc sobie dostępne uczynić we wszystkich porządkach, to jest chcąc je mieć niezawisłe od rozwiązania zrównań, potrzeba nam się zagłębić w teorię granic, do których się odnogi nieskończone linii krzywych zbliżają. Granice te, któreśmy ledwo-niestycznymi nazwali, muszą mieć także swoje podziały i gatunki podług różnych wymiarów ilości odmiennych w zrównaniu. Wystawmy sobie różne potęgi ilości odmiennę x , lub kilku na raz; odsunawszy myślą takowe ilości odmiennę do ostatnich granic ich wzrostu lub ubywania, i poznawszy stan x w takowej granicy względem ilości statecznych i skończonych, poznać nam go iefzcze potrzeba względem innych ilości odmiennych, i względem różnych wymiarów teyże samey ilości. Wielcy Geometrowie naszego wieku począwszy od Newtona, podzieliwszy się naprzód na zdania, zgodzili się potem na różne stopnie ilości nieskończenie wielkich, które im otworzyły niezmiernie rozległą drogę wynalazków w Matematyce wyższej. Zapatrzywszy się na tyle nieprzepartych prawd przez nich odkrytych, nie można było z wypadków wątpić o pewności wprowadzonych początków. Ale tłumaczenie takowych początków tak zostało ciemne i niezrozumiane w ich dziełach; iż żądroszcząc ich przenikłości, trzeba było ubolewać nad losem prawdy, że wydobyta z głębi trudności, małej liczbie rozumów stawała się dostępną; a co nążytałością, że Geometryą będąc zawsze stolicą oczywistości, pokrywać się zaczęła zasłoną, za którą ciężko się było przedrzeć rozumowi. Któż bowiem mógł kiedy zrozumieć ilości nieskończenie wielkie i nieskończenie małe podzielone na różne stopnie, nieskończenie większe względem drugich nieskończonych i t.d? A przecięż ten był język wprowadzony w dzieła wielkich

Eo

ludzi,

Ledwo-niestyczne linii krzywych prowadzi nas do teorii granic. Wytyka się nie dokładne tey teorii tłumaczenie.

ludzi, a znaczenie takowych słów zostało w ciemności swojej aż do czasów dwóch Geometrów Paryżkiej Akademii d' Alembert i Cousin, s których pierwszy trafiwszy szczęśliwie na drogę prawdziwego znaczenia; zostawił drugiemu chwale wyłożenia w całej mocy i świetle najtrudniejszych początków Matematyki wyższej. Obydwa atoli zostawili jeszcze wiele do czynienia w jasnym wyłożeniu różnych stopni ilości nieskończenie wielkich. Spodziewam się że to, co mi długą uwagą podała, będzie miłą dla czytelnika rzeczą, bo go przyprowadzi naprzód do wystawienia sobie w ogólnym obrazie prawd matematyki wyższej; powtóre: że teorią odnog nieskończonych w liniach krzywych znajdzie daleko jaśniejszą i mocniejszą wyłożoną, niż dotąd była.

Znaczenie i
początki teo-
ryi granic.

Przeprowadziwszy myślą ilość jakąkolwiek odmienną x , przez wszystkie wzrosty lub ubywania aż do swojej granicy (§. 16. Algebry); wiemy tylko z własnych naszych przypuszczeń i natury samych granic, że ją potem żadną ilość skończoną nie może powiększyć ani zmniejszyć: ale o naturze i innych właściwościach takowej do granic odniesionej ilości nic sobie jasnego i oznaczonego nie możemy wystawić, jeżeli tę ilość zważamy samotną i oderwaną od wszelkiego związku; bo poznawania ilości nie mogą być tylko względne, to jest przez porównanie jej odmian z innymi ilościami: mając zaś związek ilości odmiennę z innymi ilościami wyrażony przez zrównanie, i w niem odniosły tę odmienną ilość do granicy swego wzrostu lub ubywania, wszystkie ilości stateczne i skończone które są do niej dodane lub odciągnięte nie mogą jej więcej zmniejszyć ani powiększyć, zniknąć przed nią muszą, i być powinny wymazane z zrównania: to zrównanie straciwszy niektóre terminy odmieni związek, a z nim całą wartość i naturę ilości odmiennę. Nowa ta wartość całę różną od przeszłej, uczy nas dopiero o właściwościach granicy, do której się ilość w swych

swych odmianach zbliżała. Niech będzie równanie $Ax+By+C=0$, w którym x, y , są odmiennymi; A, B, C , zaś funkcyami ilości statecznych; odniósłszy x, y , do swych granic, czyli iak mówić zwykliśmy uczyniwszy je nieskończonemi; C w porównaniu ich zniknie, i równanie się zamieni na $Ax+By=0$, dające nam związek dwóch odmiennych x, y , całe inży od przeszłego, to jest związek ten, do którego się pierwszże równanie przy ustawicznym wzroście ilości zbliżało. To co mowiemy o ilościach wzrastających, służy równie ilościom ubywającym czyli zbliżającym się do drugiey granicy zero; s tą różnicą, że iako w pierwszym przypadku terminy złożone s funkcyi statecznych nikną przed odmiennemi, tak w ostatnim, terminy ilości odmiennych niszczą przed statecznemi. S tych uwąg wypadaia następujące prawdy: *Naprzód*: że odnośzenie ilości odmiennych do swych granic nic nas nie uczy w funkcyi, zostawiając w nas wyobrażenie ciemne i obłąkané o naturze takowych odmian; a przeto że takowy sposób poznawania jest właściwy samym związkom i równaniom. *Powtóre*: że sposób takowy uważania, nic innego nie jest, tylko sztuką-rozumu bärzo szczęśliwą do przerabiania iednych związków ilości na drugie, sztuką wyciągnięną z głębokich uwąg nad własnościami ilości odmiennych.

Pamiętni o początku wyłożonym w §. 27. Algebry, że natura ilości zależy na iednořtayności wymiaru, wnieść powinniśmy, że w równaniu zamyskającem ilości odmienné różnego wymiaru, każdy stopień mieć powinien inną granicę, do której się w swych odmianach zbliża; iakże te granice rozróżnić i znaleźć w równaniu iakiegokolwiek stopnia $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+ \dots +H=0$. Na rozwiązanie téy trudności przypomniemy sobie początki §. 19. Algebry, roździeliwży pytanie teraznięysze na dwa przypadki: to jest kiedy w równaniu podaném współ-czynniki A, B, C , i t. d. są funkcyami samych

mych ilości statecznych; powtóre: kiedy też współczynniki zamykają drugą ilość odmienną y . Co do pierwszego: równanie podane stopnia m , zamyka m pierwiastków, z których każdy daie wartość x przez funkcją ilości statecznych. Tyle więc z tego równania wypadnie równań pierwszego stopnia, ile m ma jedności. Wystawmy sobie takowe równania wyrażające pierwiastki x , $\alpha x + a = 0$, $\beta x + b = 0$, $\gamma x + c = 0$. i t. d. Gdybyśmy teraz w każdym z takowych równań, x odnieśli do swęj granicy; ilości stateczne a , b , c , i t. d. caleby znikły, nie zostawiły tylko samę odmienną x ; te ilości odmiennę mnożąc przez się, wypadłby nam tylko sam najwyższy termin równania podanego $Ax^m = 0$; wszystkie zaś terminy inne caleby odpadły, bo te terminy powstały w równaniu przez mnożenie ilości odmiennych z statecznemi, które w granicach nikną. Więc w równaniu zawierającym ilości odmiennę różnych wymiarów, odnoząc te ilości odmiennę do swych granic, wszystkie terminy niższych wymiarów nikną przed wyższemi. Ostrzegamy sobie, że ten przykład wzięliśmy tylko dla objaśnienia barzięj niż dowodu, żeby nam kto przeciwieństwa w naszych rozumowaniach nie zarzucił, na które my mamy pilną uwagę. Poydźmy już do drugiego przypadku, wystawiwszy sobie że w równaniu podanem A, B, C , i t. d. są funkcjami drugiey ilości odmiennę w tymże samym wymiarze: gdybyśmy byli w stanie rozwiązać takowe równanie, i wyrazić x przez funkcją y i przez ilości stateczne, w każdym zaś takowem pierwiastku odniósłszy x, y , do swych granic; otrzymalibyśmy terminy zamykające x wymierne, i funkcją y z znakiem pierwiastkowym tego stopnia, w którym się x znajdowało: rozebrawszy iefzcze terminy pod znakiem pierwiastkowym na swę mnożniki, i w nich wymazawszy ilości stateczne dodane lub odciągnięne, przyszlilibyśmy do pierwiastków, które

które przez mnożenie wydadzą same terminy wymiaru najwyższego. Weźmy za przykład zrównanie 2go porządku $y^2 + \frac{ex+c}{f}y = -\frac{dx^2+bx+a}{f}$

$$y + \frac{ex+c}{2f} = \pm \sqrt{\left[\frac{(ex+c)^2}{4f^2} - \frac{dx^2+bx+a}{f} \right]}, \text{ uczy-}$$

niwszy $x = \frac{1}{0}$, $y = \frac{1}{0}$, zostaje się $y + \frac{ex}{2f} = \pm \dots$

$$\sqrt{\left[\frac{e^2x^2}{4f^2} - \frac{x[dx+b]}{f} \right]}, \text{ gdzie iefzcze } i \text{ } b \text{ zniknie,}$$

zostawiwszy $y + \frac{ex}{2f} = \pm x \sqrt{\left(\frac{e^2-4fd}{4f^2} \right)}$; pierwiastek ten

sam, który wypada s terminów najwyższego wymiaru $fy^2+exy+dx^2=0$. Gdyby prawda ta nie iaśnieiy się wydawała w ogólnym widoku własności zrównań, moglibyśmy ią do najsicisleyszego dowodu przyprowadzić, który każdy łatwo ogarnie wystawilzy sobie, że funkcya pod znakiem pierwiastkowym zamykaiąc same terminy z ilością odmienną n.p. y , po zniknięciu wsfyzfikich innych terminów ftatecznych, nie może bydz innego wzoru tylko $Ay^m + By^{m-1} + Cy^{m-2} \dots + Ey = y(Ay^{m-1} + By^{m-2} + Cy^{m-3} \dots + E)$, w którey znowu E w porównaniu innych zniknie, zostawiwszy funkcya $y^2(Ay^{m-2} + By^{m-3} + Cy^{m-4} \dots + D)$ gdzie znowu D zniknie; i tak to nifzczenie terminów ciagnąć się będzie póty, póki wsfyzfikie niższych wymiarów terminy odpadifzy, nie zostawia samego najwyższego wymiaru Ay^m . Aże zrównanie podane iakiegokolwiek stopnia, powinno takowe zostać przy ostatnich granicach odmiń, iakieby wypadło s pierwiastków ie składaiących i odniesionych do tych ostatnich granic; przeto w zrównaniu iakiegokolwiek stopnia odnióifzy ilości odmienné do ostatnich granic wzrostu, wsfyzfikie terminy niższych wymiarów nikną przed terminami wymiaru najwyższego: odnióifzy zaś té ilości odmienné do

ne do ostatnich granic ubywania, terminy wyższych wymiarów nikną przed terminami wymiaru najwyższego. Drugą tę część teraznięyszego twierdzenia łatwo jest barzo s tych samych początków dowieść. Zagłębiwszy zaś myśl w samą metafizykę granic, łatwo poymiemy różne ich stopnie i porządki tak, iak i w ilościach skończonych; co nam barzo dobrze objaśniają linie krzywe: ieżeli bowiem granica ilości odmiennych wprowadzą nowy związek w zrównanie, a przez to pokazuje nową linią krzywą, do której się linią podaną zbliżała; ta nowa linia będąc granicą pierwszszą, może mieć także za granicę inną linią, a przeto odwołasz ją znowu do swej granicy, ilości odmienné staną się powtornie nieskończenie wielkimi, a czém były w pierwszszej granicy ilości stateczne względem odmiennych, tém będą w granicy drugiey ilości odmienné pierwszego stopnia względem stopnia wyższego: tak dalece, że iako nie jest żadną nieprzyzwoistością wystawić sobie szereg granic, przez który linie krzywe zniżając się w porządkach, przechodzą, owszem zdaie się być konieczną własnością rozlegle ogarnionych odmian; wnosić, że linia krzywa która była granicą pewney linii, może mieć także swoię granicę, i ta nowa także swoię; tak nie jest żadną nieprzyzwoistością wystawić sobie różne porządki ilości nieskończenie wielkich.

$A, \infty, \infty^2, \infty^3, \infty^4, \infty^5, \infty^6 \dots \infty^\infty$.

tén postępek zaczyna się od ilości stateczney A , i każdy termin postępu niknie przed następującym w zrównaniu. Skąd łatwo nam jest zrozumieć co znaczą w dziełach Geometrów ilości nieskończenie wielkie, nieskończenie więkksze od innych nieskończonych: Zaisie ięzyk nasz na iasných załadzonym obrazach té same znaczenia w innych zamyká słowach; i co Geometrowie mówią, że ∞^2 jest nieskończenie więkším od ∞ ; ∞^3 jeszcze nieskończenie więkším od ∞^2 ; i t. d. to my wyrażamy, że granice drugie ilości odmiennych przeszędłszy wszystkie wzrosły skończone

skończoną, i wszystkie wzrosły granic pierwszych, nie mogą być powiększone ani zmniejszone żadną ilością skończoną, ani żadną ilością z pierwszych granic; a przeto iak ilości skończoną, tak ilości granic pierwszych nikną przed niemi: toż samo twierdzić powinniśmy o granicach drugich względem trzecich, o trzecich względem czwartych, i ogólnie względem granicy m , o wszystkich ią poprzedzających. Te atoli własności nie służą tylko różnym potęgom téż samey ilości: bo jeżeli n.p. zrównanie zamykają w sobie różne potęgi x , i oprócz tego potęgi y, z , i innych więcéy ilości odmiennych; wszystkie potęgi niższe nikną przed potęgą najwyższą x , w swojej granicy; tak iako potęgi y przed najwyższą potęgą y ; ale żadną potęgą niższą y nie może niknąć przed potęgą wyższą x , ani potęga z przed potęgami wyższymi x albo y . Potęga bowiem pierwszą y albo z , może być równą wyższym potęgom x , a przeto w granicy wzrostu zniknąć przed niemi nie może.

Wystawmy sobie teraz ułamek $\frac{A}{B}$ będący funkcją

ilości odmiennych wzrastających: jeżeli w nim A zamykają wyższą potęgę ilości odmiennych iak B , w porównaniu tego ułamku ilości skończoną niknąć będą w granicy wzrostu; jeżeli zaś B zamykają wyższą potęgę iak A , ułamek taki zniknie przy ilościach skończonych, a mając szereg ułamków, których mianowniki rosną w potęgach ilości odmiennych n.p. $\frac{A}{Bx}$

$+\frac{C}{Dx^2} + \frac{E}{Fx^3} + \frac{G}{Hx^4} + \dots + \frac{U}{Wx^u}$; jeżeli liczniki są iednego wymiaru z współ-czynnikami mianowników, przy granicy wzrostu x , wszystkie ułamki znikną przed pierwszym $\frac{A}{Bx}$, iako przed najniższą potęgą mianownika: tak właśnie iak mają szereg potęg wzrasta-

wzrastających w jakimkolwiek równaniu $Ax+By+Cxy+Dx^2+Ey^2+Fx^3+$ i t. d. $=0$; gdzie ilości odmiennie x , y , ubywają; ódniośszy je do ostatniej granicy swego ubywania, wszystkie potęgi wyższe tego równania znikną przed najniższą, zostawiwszy $Ax+By=0$.

§. XVIII.

Stosowanie po
przedzającej
teorii do linii
krzywych.

Tę początki prowadzą nas do bardzo ważnej i rozległej teorii linii krzywych. Mając równanie jakiegokolwiek stopnia $P+Q+R+S+\dots+V=0$. w którym P jest funkcją dwóch ilości odmiennych wymiaru n ; Q funkcją tychże ilości wymiaru $n-1$; R wymiaru $n-2$; S wymiaru $n-3$; i t. d. te ilości wzrastając lub ubywając zbliżają się do jednej z dwóch granic, i poddają nam dwa gatunki dociekań całę różne i oddzielne: zastanówmy się teraz nad pierwszym wypadającym z wzrostu tychże ilości. Ścigając myślą takowe wzrosty ilości odmiennych aż do ostatnich granic, terminy niższych wymiarów znikną przed terminami wymiarów wyższych, a równanie podane wyrażając linią krzywą, odmienni się w tej granicy na równanie całę inżę, wyrażając naturę linii prostej lub krzywej, do której się linią podaną zbliżała. Nową ta linią, którąśmy ledwie nieścyczną nazwali, zawartą jest w terminie najwyższego wymiaru. A iako natura linii zawiśła od natury pierwiastków, rostrzając pierwiastki lub mnożniki terminu wymiaru najwyższego, dowiemy się naprzód s pierwiastków rzetelnych lub uroionych czy takową linią jest podobną lub nie: powtóre, iakiego jest porządku i natury. A iako ciąg linii krzywej zawiśł, od ciągłych wzrostów współ-ufzykowanych mających zawżę wartość rzetelną aż do ostatnich swoich granic; przy tych zaś granicach te współ-ufzykowane zostają się przy wartościach zawartych w samym terminie najwyższego wymiaru; jeżeli te wartości w terminie najwyższego wymiaru stają się uroione,

uroione, wnosi się oczywiście, że te wzrośły rzetelne w pewnej odległości skończonej ustały, a z niemi ciąg. linii krzywey; a przeto że linia krzywa nie mając żadnych granic i ledwo-nieścycznych podobnych, nie ma odnóg nieskończonych. Podobieństwo więc lub niepodobieństwo ledwo-nieścycznych nauczy nas, czy linia krzywa ma odnogi nieskończone lub nie: to zaś podobieństwo zawarte jest w naturze pierwiastków lub mnożników terminu wymiaru najwyższego. Cała więc uwaga nasza zatrzymać się powinna nad mnożnikami terminu P najwyższego wymiaru w zrównaniu náyogólniejszém $P+Q+R+S+V=0$; jeżeli P zawiera wszystkich mnożników uroionych, co bydź nie może tylko kiedy zrównanie jest stopnia parzystego; wzrośły ilości odmiennych nie mając żadnych granic, ustały w odległości skończoney; i linia krzywa takowem zrównaniem opisaną nie ma żadnych ledwo-nieścycznych, ale całą się zamyka w odległości skończoney.

Przypuśćmy że P zawiera iednego mnożnika rzetelnego $p=ay-bx$, wszystkich zaś innych uroionych, które wyrażemy przez M ; M będąc wymiaru $n-1$: zrównanie więc podane będzie:

$$pM+Q+R+S+V=0; \quad p=\frac{-Q}{M}-\frac{R}{M}-\frac{S}{M}-\frac{V}{M}.$$

podług pierwszych warunków przywiązanych do każdego terminu zrównania podanego, M będąc iednego wymiaru z Q ; ułomek $\frac{Q}{M}$ nie ma żadnego wymiaru:

we wszystkich zaś innych ułomkach $\frac{R}{M}$, $\frac{S}{M}$ it.d; wymiar mianownika tém jest większy od wymiaru licznika, im terminy są odlegleysze: więc odniósłszy ilości odmiennie do ostatnich granic podług wyższych początków; terminy wszystkie znikną, zostawwszy

$$p=-\frac{Q}{M} \dots (a), \quad \text{a przeto zrównanie } (a) \text{ wy-}$$

raża ledwo-nieftyczną, do której się linia podana w takim przypadku zbliża, i w którą się przy oſtatniej granicy, zamieni. Ale kiedy dwie ilości odmiennie x, y , ſtana ſię u oſtatnich granic nieſkończonemi, ſtółunek ich będzie koniecznie ſtółunkiem ſkończonym, zawierającym w ſobie kondycyą do wprowadzenia w Q, M , ażeby te funkcy należące przedtem do linii krzywéy podanéy, przywiązać teraz do iéy ledwo-nieftycznej. Stółunek ten wyciągnąć nam potrzeba z zrównania $p=ay-bx$, które rozdzieliwszy przez ax , otrzymamy $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} + \frac{p}{ax}$, odnoſſſzy x do

ſwéy granicy, $\frac{p}{ax}$ zniknie; a ſtółunek ilości odmiennych będzie $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$; należy więc w Q, M , włożyć

b za y , a za x ; a tym ſpoſobem zrównanie (*) wyrazi linia proſtą będącą ledwo-nieftyczną linii krzywéy podanéy.

Przykład: Niech będzie zrównanie na linia krzywą $y^3 - x^3 - 2ax^2 - c^2 = 0$; znoſząc ie z zrównaniem ogólném, mamy $y^3 - x^3 = P$, $2ax^2 = -Q$, $c^2 = -R$; ponieważ $y^3 - x^3 = (y-x)(y^2+yx+x^2)$ przeto $M=y^2+yx+x^2$, $ay-bx=y-x$, to ieſt $a=b=1$:

$p = \frac{-Q}{M} = \frac{2ax^2}{y^2+yx+x^2}$, $\frac{y}{x} = 1$, włożywſzy więc w $\frac{2ax^2}{y^2+yx+x^2}$, $y=1$, $x=1$, wypada $y-x = \frac{2a}{3}$, czy-

li $3y-3x-2a=0$. zrównanie na linia proſtą która ieſt ledwo-nieftyczną linii krzywéy podanéy.

Ledwo-nieftyczne proſte będąc granicami pewnych linii krzywých, nie tak nam dokładnie dają poznać ich naturę, jak inné linie krzywé, iuż nam ſkąd inąd znané. Tamté bowiem nie uczą nas dokładnie o li-

czbie odnóg nieſkończonych linii podanéy; gdybyśmy

zaś wiedzieli że linia krzywa ma za granicę inną linią krzywą prościęjszą; znając tę ostatnię własności i liczbę odnóg niekończonych, przyzlibyśmy łatwo do poznania odnóg niekończonych linii podanej. Potrzeba nam więc od ledwo-nieftycznych prostych przyiść do poznania ledwo-nieftycznych krzywych, to jest znaleźćszy linią prostą iako ledwo-nieftyczną linią podaną, szukać nam iefzcze potrzeba innej linii krzywej, któraby miała też linią prostą za ledwo-nieftyczną, a tak mając dwie linie krzywe mające iedną spólną granicę, wnieść możemy, że iedna z tych linii krzywych jest granicą drugiey: zawsze zaś linią prościęjszą lub niższego porządku jest granicą linii zawiększej. Przekonywa nas o tę ostatnię prawdzię teorię granic, biorąc bowiem ilości odmiennę za niekończone, w porównaniu ich terminy niektóre odpadaia w zrównaniu, i zniżaią ie o pewny stopień; i lubo ta prawda znayduie swoje wyięcia, iednakowóz okazuię się w więkšej liczbie linii krzywych: a rozumuiąc z ogólnej uwagi i z własności zrównań w §. 20. Algebry wyłożonej; twierdzić można, że linia krzywa iakiegokolwiek porządku może mieć za granicę linie krzywe wszystkich porządków niższych.

Jakimże zaś sposobem od ledwo-nieftycznych prostych przyiść do krzywych? zależy to od przerobienia zrównania podanego na inne, w którymby u ostatnich granic ilości odmiennych większą liczbę terminów ocalała. Jeżeli bowiem dwa pozostałe terminy $P+Q=0$ zrównania podanego dały ledwo-nieftyczną prostą; zostawiwszy ich n.p. trzy; otrzymamy linią krzywą, która będzie ledwo-nieftyczną linią podaną. Na tęg koniec przeniesmy oś na samę ledwo-nieftyczną prostą; na czem zyskamy náprzód, że w granicy linii krzywej nie obie razem wespół-ufzykowane stana się niekończonemi, a przeto nie wszystkie terminy niższych wymiarów znikną przed terminem wymiaru najwyższego: powtóre że oś ta będąc ra-

fig. 18.

zemi osią linii krzywey szukaney, a zamkniętey w równaniu $P+Q+R+S \dots +U=0 \dots (X)$, potrafiemy za pomocą rachunku i rozumowania przenieść współ-ufzykowane do iey odnóg. Chcąc nowę tę współ-ufzykowaną wyrazić przez funkcją dawnych; weźmy na fig. 28. linią AB za oś nową, czyniącą z osią prze-

szłą AL kąt LAB , którego $\text{Stycz.} = \frac{b}{a}$, a przeto

$$\text{Wflawa} = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}; \text{Dofława} = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}. \text{ Idzie}$$

nám teraz o zamianę współ-ufzykowanych $AP=x$, $PM=y$, na $AB=t$, $BM=u$. Poprowadziwszy DP równo-ległą MB ; PC równo-ległą AS ; mamy $DP=$

$$AP.W\beta.PAD = \frac{xb}{\sqrt{(a^2+b^2)}}; AD = \frac{xa}{\sqrt{(a^2+b^2)}}; PC =$$

$$PM.W\beta.PMC = \frac{yb}{\sqrt{(a^2+b^2)}}; MC = \frac{ya}{\sqrt{(a^2+b^2)}}; \text{ a prze-}$$

$$\text{to } t=AB = \frac{xa+yb}{\sqrt{(a^2+b^2)}}; u=MC-PD = \frac{ya-xb}{\sqrt{(a^2+b^2)}}; \text{ z}$$

dwóch tych zrównań za pomocą eliminacyi otrzymá-

$$\text{my } x = \frac{at-bu}{\sqrt{(a^2+b^2)}}, y = \frac{au+bt}{\sqrt{(a^2+b^2)}}; \text{ kładąc więc w}$$

zrównanie (X) , za x, y , dopiero znalezione wartości, przerobiemy ie na inne między t, u . Zebyśmy zaś to przerobione zrównanie w całej wystawili ogólności, należy nám w wartościach każdego terminu zamknąć wszystkie mnogości z t, u , składające potęgę każdemu terminowi właściwą. Dla uproszczenia jednak rachunku wszystkie współ-czynniki P wyrażemy przez α ; współ-czynniki Q przez β ; R przez γ , S prze δ ; co nic nie naruży ogólności dociekáń; będzie przeto:

$$P = \alpha^{n-1}u + \alpha^{n-2}u^2 + \alpha^{n-3}u^3 + \alpha^{n-4}u^4 + \text{i t. d.}$$

$$Q = \beta^{n-1}t + \beta^{n-2}tu + \beta^{n-3}u^2 + \beta^{n-4}u^3 + \text{i t. d.}$$

$$R =$$

$$K = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \gamma t^{n-5}u^3 + \text{i t. d.} \dots (Y).$$

$$L = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4}u + \delta t^{n-5}u^2 + \delta t^{n-6}u^3 + \text{i t. d.}$$

$$T = \varepsilon t^{n-4} + \varepsilon t^{n-5}u + \varepsilon t^{n-6}u^2 + \varepsilon t^{n-7}u^3 + \text{i t. d.}$$

w używaniu tych wartości potrzeba nam mieć wzgląd na liczbę mnożników uważanych w P: te mnożniki wyrażać będzie ilość odmienna u ; tak dalece, że jeżeli P zamyka jednego mnożnika rzetelnego, weźmiemy z wartości na P termin pierwszy $\alpha t^{n-1}u$, gdzie u wyraża nam tego mnożnika; i dla tej ci to przyczyny w P nie wchodzi termin αt^n . Jeżeli w P uważać będziemy dwóch mnożników równych, weźmiemy z P termin $\alpha t^{n-2}u^2$; jeżeli trzech mnożników równych, termin $\alpha t^{n-3}u^3$, i t. d. co samo ma się rozumieć o funkcjach Q, R, S, i t. d. jeżeli takowe mnożniki zamykać będą.

Wróćmy się teraz do pierwszego przypuszczenia w równaniu (X); uważaliśmy w jego terminie P najwyższego wymiaru, jednego mnożnika rzetelnego, i otrzymaliśmy równanie na ledwo-nieftyczną $P+Q=0$, to równanie w nowych współ-ufykowanych wypada $\alpha t^{n-1}u + \beta t^{n-1} = 0$, t bowiem stawszy się nieskończonym, wszystkie terminy w P znikną przed pierwszym; i wszystkie także w Q przed βt^{n-1} znikną, zostawiwszy $\alpha t^{n-1}u + \beta t^{n-1} = 0$, czyli - -

$$u = -\frac{\beta}{\alpha} = c, \text{ równanie na linią prostą równoległą}$$

osi. S tego trzeba nam przyiść do równania na linią krzywą przez następujące rozumowanie: terminy w P, Q, i terminy niższych wymiarów R, S, T, i t. d. dla tego powinny być zniknąć w granicach ilości odmiennych, że nie należą do natury ledwo-nieftycznej prostej, ale tylko do punktów linii krzywej podanej. Jeżeli niktąć te terminy utrzymamy, wprowadziwszy na u taką wartość, iaką mu w granicy służy; zamienniemy równanie (X), na takie, iakie bydz powinno przy ostatniej granicy, co

F4 do u ;

do u ; a wprowadziwszy znowu kondycję należytą na t , jeżeli to zrównanie będzie wyrażać linią krzywą, ta będzie granicą linii zamkniętej w zrównaniu (X) , kładąc więc we wszystkie niktające terminy za u, c ; za $u + \beta = u - c$, otrzymamy:

$$(u - c)t^{n-1} + t^{n-2}(ac^2 + \beta c + \gamma) + t^{n-3}(ac^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + t^{n-4}(ac^4 + \beta c^3 + \text{i t. d.}) + \text{i t. d.} + V = 0, V \text{ będąc}$$

funkcją samych ilości statecznych (Z) . Zrównanie (Z) już nie jest na linią krzywą podaną, ale na inną linią krzywą mającą ledwo-nieftyczną spólną z linią podaną. Rozdzielmy je całe przez t^{n-1} , i wszystkie współ-czynniki stateczne wyrażmy przez $A', B', C', \text{i t. d.}$ wypadnie nam:

$$u - c + \frac{A'}{t} + \frac{B'}{t^2} + \frac{C'}{t^3} + \frac{D'}{t^4} + \dots + \frac{V}{t^{n-1}} = 0 \quad (Z').$$

odniósłszy teraz t do swej granicy, wszystkie potęgi t wyższe w mianownikach, zniszczą terminy następujące po $\frac{A'}{t}$ iako potędze náyniższe, i zostanie się zrównanie na ledwo-nieftyczną $u - c + \frac{A'}{t} = 0$, które że

należy do Hyperboli między ledwo-nieftycznymi, uczy nas tego §. 16; aże zrównanie $u - c + \frac{A'}{t} = 0$ wyraża

tylko dwie odnogi nieskończone w Hyperboli, dowodzi nam, że linia iakiegokolwiek porządku, opisaną zrównaniem (X) , ma tylko jednego mnożnika rzetelnego w P ; ma dwie odnogi nieskończone mieszające się z dwiema odnogami Hyperboli w granicach ilości odmiennych; znając więc położenie odnog hyperbolicznych, widzimy zaraz iakie także mieć powinny położenie odnogi nieskończone linii podanej. Gdyby drugi termin w zrównaniu (Z') nie znajdował się, co się przytrafi kiedy $ac^2 + \beta c + \gamma = 0$, na ten

czas termin $\frac{B'}{t^2}$ będzie náywiększym, przed którym wszystkie

wszystkie następujące znikną, zostawiwszy zrównanie na ledwo-nieftyczną $u-t+\frac{B'}{t^2}=0$; a jeżeli jeszcze $B'=0$, zrównanie na ledwo-nieftyczną będzie $u-t+\frac{C'}{t^3}=0$, to jest: w przypadku zniknięcia któ-

rych terminów, brąc potrzeba zawsze następujący, który z $u=c$ da zrównanie na ledwo-niestyczną; a gdyby wszystkie po pierwszym znikły, zostanie się $u=c=0$ na linii prostej równo-ległej osi, którą w odległości niekończoney zmniejsza się z linią krzywą podaną. S czego się pokazuje, że im niedostateczniejszy jest zrównanie (Z') co do liczby terminów, kiedy całe wszystkie nie znikną; tém linia krzywa będąca ledwo-niestyczną linii podanej, jest wyższego porządku.

Przykład. Szukamy łedwo-nietyczny krzywéy, linii zamkniętéy w zrównaniu $y^2-x^3-2dx^2-c^2=(y-x)(y^2+yx+x^2)-2dx^2-c^2=0$: ponieważ w teraźniéyżym przykładzie $a=1$, $b=1$; styczna kąta LAB na fig. 28. $=1$, to też kąt nowéy osi s przefzłą iest

Fig. 28.

45°. a przeto $x = \frac{t-u}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{u+t}{\sqrt{2}}$; włożywszy za x ,
 y , te wartości w równanie podane, zamienimy je
na $\frac{6t^2u+2u^3}{2\sqrt{2}} - \frac{2dt^2-4dtu+2du^2}{2} - c^2 = 0$.

w ostatniéj granicy $2u^3$ zniknie przed $\delta t^2 u$, i zostanie się $\frac{3t^2 u}{\sqrt{2}} - dt^2 = 0$. - - $u = \frac{d\sqrt{2}}{3}$, włożywszy za u tę wartość w terminy niknące zrównania przedostatniego; i rozdzieliwszy całe przez t^2 , otrzymamy

$$3u = d\sqrt{2} + \frac{4d^2}{3t} - \frac{2d^3}{9t^2} + \frac{d^3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} - 2c^2 \cdot \sqrt{2}}{27t^3} = 0.$$

a odniósłszy t do ostatniej granicy, wypada zu-
• $d\sqrt{z + \frac{4d^2}{zt}} = 0$. Zrównanie na Hyperbole, której
Fs dwie

dwie odnogi nieskończone mieszają się z dwiema odnogami linii podanej w ostatniej granicy ilości odmiennych.

§. XIX.

Ledwo-niefty.
czne na dwa
mnożniki rzę-
telne w termi-
nie najwyższe
go wymiaru.

Niech termin najwyższego wymiaru P zamyka dwóch mnożników rzetelnych; te mogą być równe, lub nierówne, rozdziela uwagę naszą na dwa przypadki. Niech nałaprzód dwa te mnożniki będą nierówne $p=ay-bx$, $q=cy-dx$, $P=(ay-bx)(cy-dx)M$, M będąc wymiaru $n-2$, idąc za tem saniem rozumowaniem na każdego w szczególności mnożnika, takiegośmy użyli w §. poprzedzającym, znajdziemy na ledwo-nieftyczną odpowiadającą p , zrównanie,

$$p = \frac{-Q}{(cy-dx)M}, \text{ aże w ostatnich granicach wzrostu } \frac{y}{x} = \frac{b}{a}; \text{ przeto } p = \frac{-Q}{(cb-da)M}, \text{ gdzie iefzcze}$$

w Q , M , kładź należy b za y , a za x ; tym sposobem przydziemy do ledwo-nieftycznej prófey, s którą się linia krzywa w odległości nieskończonej zmieszają; przerobiwszy współ-ufzykowane x , y , na t , u ; i szukając ledwo-nieftycznej krzywey tym samym sposobem iak w §. poprzedzającym, znajdziemy zrównanie na dwie odnogi Hyperboli wzoru $u-c+\frac{A}{t}=0$. Drugi mnożnik $q=cy-dx$ przyprowadzi

$$q = \frac{-Q}{(ay-bx)M}, \text{ aże } \frac{y}{x} = \frac{d}{c} + \frac{q}{cx}, \text{ w ostatniej zaś}$$

$$\text{granicy } \frac{y}{x} = \frac{d}{c}, \text{ przeto } q = \frac{-Q}{(ad-bc)M}, \text{ gdzie w } Q,$$

M , włożyć należy d za y , c za x , co nas przyprowadzi naprzód do drugiej ledwo-nieftycznej prófey; ta zaś, przerobiwszy współ-ufzykowane x , y , na t , u ; do drugich dwóch odnóg Hyperboli: przeto linia krzywa opisaną zrównaniem $P+Q+R+S+U=0$.

$+U=0$. w którym termin P najwyższego wymiaru zamykają dwóch mnożników rzetelnych nierównych; ma cztery odnogi nieskończone, mieżające się z czterema odnogami Hyperboli w ostatnich granicach ilości odmiennych.

Niech już P zamykają dwóch mnożników rzetelnych równych, czyli niech będzie $p=q$, a zrównanie na linią podaną wyrazi się: $(ay-bx)^2 M + Q + R + S + T$.

$+U=0$; czyli $(ay-bx)^2 + \frac{Q}{M} + \frac{R}{M} + \frac{S}{M} + i$ t. d. $+U$

$\frac{U}{M} = 0$; M będąc wymiaru $n-2$, widzimy oczywiście

że $\frac{R}{M}$ zostawszy bez żadnego wymiaru, należy do

ledwo-nieftycznę; lubo zaś w $\frac{Q}{M}$ licznik przewyższa

jednym wymiarem mianownika, nie może jednak $\frac{Q}{M}$

w ostatnich granic stać się nieskończonem; bo gdyby tak było, wszystkie terminy zrównania znikłyby przed

nim, zostawiwszy $\frac{Q}{M} = 0$, byłoby więc $\frac{Q}{M}$ razem gra-

nicą rosnących i ubywałych ilości, co jest przeciwnie wszystkim rozumowaniom. Nie tylko zaś ta

rażająca nieprzyzwoitość, ale nawet pierwsze początki

teraźniejszej teoryi przekonują nas, że $\frac{Q}{M}$ należąc

równie do ledwo-nieftycznę, iako i $(ay-bx)^2$, ieden mnożnik zbywający w $\frac{Q}{M}$, będzie funkcją x, y ,

na współ-ufzykowane nowej linii rodzący się z linii podanej w granicach. Zrównanie na tę nową li-

nią $(ay-bx)^2 + \frac{Q}{M} + \frac{R}{M} = c$, jeżeli się nie będzie mo-

gło rozebrać na dwa wymiérne pierwszego stopnia, wyraża linią krzywą drugiego porządku, która się zmniejsza w granicy współ-ufzykowanych, z linią podaną. Zebysmy tę linią w prościelyżym otrzymali wyrazie, i wszystkie szczególności do terażniejszego przypuszczenia przywiązane poznali, odmieńmy znowu współ-ufzykowane x, y , na t, u , kładąc $x =$

$$\frac{at-bu}{\sqrt{(a^2+b^2)}}, y = \frac{au+bt}{\sqrt{(a^2+b^2)}}, \text{ i wszystkie } \S \text{ poprzedza-}$$

jącego warunki utrzymawszy, będzie:

$$P = a^{m-2}u^2 + a^{m-3}u^3 + a^{m-4}u^4 + \text{i t. d.}$$

$$Q = \beta^{m-1} + \beta^{m-2}u + \beta^{m-3}u^2 + \text{i t. d.}$$

$$R = \gamma^{m-2} + \gamma^{m-3}u + \gamma^{m-4}u^2 + \text{i t. d.}$$

$$S = \delta^{m-3} + \delta^{m-4}u + \delta^{m-5}u^2 + \text{i t. d.}$$

+ i t. d.

jeżeli P zamyka dwóch mnożników równych, wszystkie zaś terminy następujących wymiarów Q, R, S , znajdą się, i żadnego takiego mnożnika nie zawierają; wypada zrównanie na ledwo-niestyczną

$a^{m-2}u^2 + \beta^{m-1} + \gamma^{m-2} = 0$, czyli $au^2 + \beta t + \gamma = 0$, które wyraża Parabolę: w niej na $t = \infty$, u staie się także ∞ , i linia podana ma dwie odnogi nieskończone mieszające się z dwiema odnogami Paraboli w granicy ilości odmiennych. Jeżeli zaś Q zamyka jednego takiego mnożnika jakich zamyka P , zrównanie na ledwo-niestyczną jest

$$a^{m-2}u^2 + \beta^{m-2}u + \gamma^{m-1} = 0, \text{ czyli } au^2 + \beta u + \gamma = 0. \text{ (B'')}$$

które wyraża dwie linie proste równo-ległe jeżeli γ jest ujemnem, albo będąc dodatnem, $\beta\beta > 4a\gamma$, ale jeżeli $\beta\beta < 4a\gamma$; linia podana nie ma żadnej ledwo-niestycznej, a przeto żadnej odnogi nieskończonej. Zrównanie jeszcze (B'') złożone z mnożników rzetelnych równych lub nierównych posłużyć nam może do wynalezienia ledwo-niestycznej krzywey, kładąc wartości z niego wyciągnięte w terminy niknące zrównania

wnania podanego: na pierwiastki dwa nierówne, znajdziemy takie same wypadki, jakie się pokazały na początku teraźniejszego §. uważając takowych mnożników w P. Na pierwiastki zaś równe w (B''), wyraziwszy je przez $(u-c)^2$ otrzymamy zrównania

$$(u-c)^2 + \frac{A}{t} = 0, \text{ albo } (u-c)^2 + \frac{A'}{t^2} = 0, \text{ albo } (u-c)^2$$

$$+ \frac{A''}{t^{n-2}} = 0, \text{ jeżeli terminy zawierające } t^{n-3}, t^{n-4}, t^{n-5} \text{ i t. d.}$$

nie znajdują się w równaniu. A gdyby jeszcze w równaniu $(u-c)^2 t^{n-2} + A t^{n-3} + A' t^{n-4} + A'' t^{n-5} + \text{i t. d.} = 0$.

gdzie $A, A', A'', \text{ i t. d.}$ są funkcjami słabych ilości statecznych, dla wprowadzonej wartości c za u w terminy niknące, gdyby mówię jeszcze w tym równaniu współczynnik t^{n-3} zamykał mnożnika $u-c$; przybyłby jeszcze jeden termin na ledwo-nieistyczną, i zrównania któreby na ten czas wypadły, są $(u-c)^2 + \frac{A(u-c)}{t} + \frac{A'}{t^2} = 0$, lub $(u-c)^2 + \frac{A(u-c)}{t} + \frac{A''}{t^3} = 0$..

i ogólnie $(u-c)^2 + \frac{A(u-c)}{t} + \frac{A'}{t^{n-2}} = 0$, a gdyby ie-

szcze drugi takowego równania termin był zero, a trzeci zawierał mnożnika $u-c$, potęgą t w mianowniku terminu drugiego powiększyłaby się, biorąc termin następujący. Zgoła uważając w równaniu na ledwo-nieistyczną termin ostatni zero, a biorąc zań terminy następujące, potęgą tego ostatniego terminu powiększy się aż do $n-2$; uważając zaś następnie termin średni zero, a w następującym mnożnika $u-c$; wpadamy na równanie wzoru $(u-c)^2 + \frac{A(u-c)}{t^p} + \frac{A'}{t^q} = 0$. Podobne wypadki znajdziemy,

uważając w równaniu $P+Q+R+S \text{ i t. d. } +V=0$, i przerobionem na współ-ufzykowane $t, u, Q=0$, lub $R=0$, i t. d. a biorąc zaraz następujący termin na miejsce niknącego.

Ktokol-

Ułatwienie tró-
dności zachodzą-
cych w tym
rachunku.

Ktokolwiek nie przywykł ielszcze do tych delikat-
nych rozumowań, s których teraznięyszą wypada teo-
rya, mogłby znaleźć trudność w pojęciu, czemu $u-c=0$
wypadłszy z zrównania pierwiastkowego na ledwo-
nieścyczną; w zrównaniu powtórném iakie są $(u-c)+$

$$\frac{A}{t}=0, \text{ §. poprzedzającego; lub teraz } (u-c)^2 + \frac{A}{t}=0$$

i t. d. traci tę pierwszą wartość, i nie staie się zero?
Ta trudność ułatwia się pierwszą uwagą nad nasze-
mi działaniami. Uważając same tylko terminy pier-
wsze zrównania $P+Q+R+S - +V=0$, otrzymali-
śmy $u-c=0$, to jest tego mnożnika rzetelnego w P, Q ,
którego zrównanie podane zawiera w terminach naj-
wyższych wymiarów, ten mnożnik $u-c$ byłby zawsze
zero, gdyby żaden termin prócz najpierwszych, w
zrównaniu nie ocalał. Ale iak prędko uwagi insze,
i natura samych ilości odmiennych zostawia więcej
terminów w zrównaniu podaném, iuż na ten czas
 $u-c=0$ nie może mieć mieysca. Wszakże gdyby-
śmy mieli zrównanie algebraiczne $(u-c)M=0$, ma-
my prawo twierdzić że $u-c=0$ jest pierwiastkiem
tego zrównania; ale gdyby w tém zrównaniu przy-
był termin L , $(u-c)M+L=0$, L nie zamykając $u-c$,
poznać każdy że iuż w tém ostatniém zrównaniu
 $u-c$ nie może być zero. Gdybyśmy zaś chcieli na
drugą iaką ilość odmienną t , wyciągnąć wartość za-
wartą w zrównaniu $(u-c)M+L=0$, i w tej warto-
ści ocalić kondycyą na u , zrównania $(u-c)M=0$,
nie moglibyśmy w pierwszym terminie kłaść c za
 u , ale tylko w terminie L ; inaczey zrównanie
 $(u-c)M+L=0$ uczynilibyśmy iak tosamém. To ro-
zumowanie przeniósłszy do teoryi ledwo-nieścycznych
nie gubiąc z myśli całego łańcucha rozumowań, szu-
kaliśmy naprzód iakiby wypadł związek współ-uszy-
kowanych, gdyby się tylko sam pierwszy termin zo-
stał w zrównaniu podaném; ten związek wypadł
nam w zrównaniu na linią prostą; szukaliśmy po-
tém linii krzywey, któraby miała za ledwo-niefty-
czną

czną też linią prostą; to jest, któreby zrównanie w terminie najwyższego wymiaru zawierało tego samego mnożnika 1go stopnia; dla czego podług kondycji założonej, pierwszego mnożnika $u=c$, w terminie P nie należało nam naruszać, ale wszystkie odmiany wprowadzać w same tylko terminy niknące. Jakież miały być te odmiany? oto żeby związek na linią podaną całe w inny zamienić, tak jak się linią krzywą z całemi własnościami odmienną w granicach: więc należało nadadź którejś wspól-ufzykowanej taką wartość, iaką linii podanej nie może służyć: powtóre żeby ten związek zamieniony nie wyrażał innej linii, tylko mającej ledwo-niestyczną prostą zamkniętą w zrównaniu $u-c=0$, a przeto należało nam w te niknące terminy kłaść c za u . To rozumowanie dobrze objęte objaśnić powinno najmniejszą ciemność naszych myśli, ieżeliby się z poprzedzających działań jeszcze została. Przyśtapmy do przykładu.

Zrównanie najwyżniejsze na linii 2go porządku jest

$$a+bx+cy+dx^2+exy+fy^2=0.$$

W niem termin najwyższego wymiaru $fy^2+exy+dx^2=0$, może zamykać albo obydwie mnożniki ujęte, albo obydwie rzetelne nierówne, albo nakoniec dwa rzetelne równe: w pierwszym przypadku linią krzywą nie ma odnóg nieskończonych, i jest Ellipsa; na którą warunek, że $e^2 < 4f^2d$ w pewnej skończonej odległości. Nie mówimy nic o kole, bo już wiemy, że koło wypada z szczególnego warunku na Ellipsę, to jest kiedy mimo-środek położony zero, a przeto tego własność w teraźniejszej uwadze jest ta sama co i Ellipsy.

Ieżeli termin najwyższego wymiaru składa się z dwóch mnożników rzetelnych nierównych, to jest: $fy^2+exy+dx^2=(my-nx)(py-qx)$, otrzymamy dwa zrównania:

$$my-nx + \frac{cy+bx}{py-qx} + \frac{a}{py-qx} = 0.$$

$$xy-qx +$$

$$py - qx + \frac{cy + bx}{my - nx} + \frac{\square}{my - nx} = 0.$$

w pierwszym z nich w granicy x, y , będzie $\frac{y}{x} = \frac{n}{m}$,
kładąc więc n za y , m za x ; i ostatni termin iako
niknący opuściwszy, otrzymamy zrównanie na ledwo-
nieścyczną odpowiadającą mnożnikowi $my - nx$,

$$my - nx + \frac{cn + bm}{pm - qm} = 0 \quad (G).$$

w drugim ponieważ $\frac{y}{x} = \frac{q}{p}$, kładąc q za y , p za
 x , wypadnie zrównanie na ledwo-nieścyczną odpowia-
dającą mnożnikowi $py - qx$:

$$py - qx + \frac{cq + bp}{mq - np} = 0 \quad (H).$$

Obydwa te zrównania na linią prostą: przeto linią
krzywą takowem zrównaniem opisaną ma cztery od-
nogi nieskończone mieszające się z dwiema liniami
prostemi w swoich granicach: cośmy właśnie widzie-
li w Hyperboli. Chcąc od tych ledwo-nieścycznych
przyjść do linii krzywey, odmieńmy oś, położywszy

$$y = \frac{mu + nt}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}, \quad x = \frac{mt - nu}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}, \quad \text{tym sposobem prze-}$$

robiemy zrównanie (G) na $u + \frac{cn + bm}{(pn - qm)\sqrt{(m^2 + n^2)}} = 0$

(G'). zrównanie zaś podane na linie 2go
porządku, będzie

$$\left[(pn - qm)u + \frac{cn + bm}{\sqrt{(m^2 + n^2)}} \right] t + \frac{(cm - bn)u}{\sqrt{(m^2 + n^2)}} + (pm +$$

$$qn)u^2 + a = 0.$$

włożywszy we wszystkie terminy prócz pierwszego
za u , wartość wyciągniętą z (G'), i rozdzieliwszy
potem całe zrównanie przez t , otrzymamy:

$$(pn - pm)u + \frac{cn + bm}{\sqrt{(m^2 + n^2)}} + \dots \quad (bn -$$

$$\frac{(bn - cm)(cn + bm) + (pm + qn)(cn + bm)^2}{t \cdot (pn - qm)(m^2 + n^2)} + \frac{a}{t} = 0.$$

które iak widzemy jest wzoru $u + s + \frac{A}{t} = 0$, na dwie

odnogi Hyperboli. Chcąc wynaleśdź podobne zrównanie odpowiadające mnożnikowi $py - qx$, kładę

náprzód $y = \frac{pu + qt}{\sqrt{(p^2 + q^2)}}$; $x = \frac{pt - qu}{\sqrt{(p^2 + q^2)}}$; przez co

náprzód zrównanie (H) zamieni się na - - - - -

$$u + \frac{cq + bp}{(mq - np)\sqrt{(p^2 + q^2)}} = 0 \quad (H').$$

Zrównanie zaś na linie 2go porządku:

$$[(mq - np)u + \frac{cq + bp}{\sqrt{(p^2 + q^2)}}]t + \frac{(cp - bq)u}{\sqrt{(p^2 + q^2)}} + (mp + nq)u^2 + a = 0;$$

w które włożywszy za u wartość wyciągnioną z (H'), przerobiemy je na zrównanie wzoru $u + r + \frac{A}{t} = 0$, wyrażające drugie dwie odnogi Hyperboli.

Ieżeli nakoniec termin náwywyższego wymiaru fktada się z dwóch mnożników rzetelnych równych, czyli $fy^2 + exy + dx^2 = (my - nx)^2$, odmiéniwszy współużytkowane x, y , na t, u ; $y = \frac{mu + nt}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}$;

$$x = \frac{mt - nu}{\sqrt{(m^2 + n^2)}}; \text{zrównanie podane zamieni się na}$$

$$(m^2 + n^2)u^2 + \frac{(cn + bm)t}{\sqrt{(m^2 + n^2)}} + \frac{(cm - bn)u}{\sqrt{(m^2 + n^2)}} + a = 0,$$

a odniósłszy t do ostatniey granicy, wypada na ledwo

$$\text{nieftyczną} \quad \dots (m^2 + n^2)u^2 + \frac{(cn + bm)t}{\sqrt{(m^2 + n^2)}} = 0 \quad \dots$$

Zrównanie wyrażające Parabolę, gdzie $t = \infty$, czyni także u nieskończonem. Parabola więc jest saméy siebie ledwo-nieftyczną, czyli w ostatniey granicy z żadną się inną linią, któraby była iéy granicą, nie mię-

124. W przypadku $cn+bm=0$, zrównanie wyraża dwie linie proste: i na ten czas zrównanie podane już nie będzie na linii 2go porządku, ale zrównaniem składanem na dwie linie proste.

§, XX.

Ledwo-niefty-
czne na trzy
mnożniki rze-
telne,

Kiedy termin P náywyższego wymiaru zamykają trzech mnożników rzetelnych nierównych, każdy z nich przyprowadzi nas do ledwo-nieftycznej prostej

opisaney zrównaniem wzoru $p = \frac{-Q}{M}$; każda zaś le-

dwo-nieftyczna prosta przez spósób już wyłożony w §§. poprzedzających, przyprowadzi nas do zrówna-

nia wzoru $u - c + \frac{A}{z} = 0$, wyrażającego dwie odnogi

nieskończone Hyperboli; przeto linia krzywą zamkniętą w zrównaniu $P+Q+R+S+V=0$, w terażniejszy przypadku, będzie mieć sześć odnog nieskończonych, mieszających się s sześcią odnogami Hyperbolicznemi w granicach ilości odmiennych. Jeżeli zaś P zawiera dwa mnożniki rzetelne równe, a trzeci nierówny; pierwsze dadzą za ledwo-nieftyczną Parabolę; ostatni náprzód linia prosta, a s tęp dopięro wypadające dwie odnogi Hyperboli; i linia krzywa podana będzie mieć cztery odnogi nieskończone, sktórych dwie mieszają się s Parabolą, dwie zaś s Hyperbolą w granicach ilości odmiennych: co wszytko s poprzedzających wypływa początków. Uważamy już w P trzy mnożniki rzetelne równe $(ay-bx)^3$; i żebyśmy wszytkie szczególne przypadki łatwiej mogli rostrząsać, odmiennym współ-ufzy-

kowane, biorąc $y = \frac{au+bt}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, $x = \frac{at-bu}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$; terminy różnych wymiarów zrównania podanego będą miały wartość:

$$P = \dots \alpha^{n-3}u^2 + \alpha^{n-4}u^4 + \alpha^{n-5}u^5 + \text{i t. d.}$$

$$Q = \beta^{n-1} + \beta^{n-2}u + \beta^{n-3}u^2 + \beta^{n-4}u^3 + \beta^{n-5}u^4$$

$$R =$$

$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \gamma t^{n-5}u^3 + \gamma t^{n-6}u^4 \\ S = \alpha t^{n-3} + \alpha t^{n-4}u + \alpha t^{n-5}u^2 + \alpha t^{n-6}u^3 + \text{i t. d.} \\ + \text{i t. d.}$$

Jeżeli samo tylko P zamyka trzech mnożników równych; zrównanie na ledwo-nieftyczną jest

$$\alpha t^{n-3}u^3 + \beta t^{n-1} = 0. \text{ czyli}$$

$$(I.) \alpha u^3 + \beta t^2 = 0,$$

które jeżeli nie można się rozebrać na zrównania wymierne stopni niższych, wyraża linią krzywą 3go porządku, która jest ledwo-nieftyczną linią podaną. Ta ledwo-nieftyczna może mieć dwie albo, sześć odnog nieskończonych podług jednego lub wszystkich pierwiastków rzetelnych, a przeto, tyleż odnog pokazuje w linii podanej.

Kiedy P zamyka trzech mnożników równych; Q może zamykać jednego takiegoż mnożnika; na ten czas żeby zrównanie całe nie było rozdzielne przez u , i warunek nasz ocalony; przybędzie do ledwo-nieftycznój termin R ; to jest $\alpha t^{n-3}u^3 + \beta t^{n-2}u + \gamma t^{n-2} = 0$, czyli

$$(II.) \alpha u^3 + \beta tu + \gamma t = 0.$$

znowu na linią krzywą 3go porządku: w obydwóch zrównaniach położywszy t nieskończonem, u staie się takim: a jeżeli w drugiem tym zrównaniu uważać będziemy γt niknąć przed potęgami wyższemi, zostanie się $\alpha u^3 + \beta tu = 0$; to jest $u = 0$, $\alpha u^2 + \beta t = 0$, s których pierwsze wyraża linią prostą która jest osią; drugie Parabolę: będzie więc mieć w takowym przypadku linią podaną cztery odnogi nieskończone, s których dwie zmieszają się z linią prostą, dwie zaś s Parabolą w granicy ilości odmiennych.

Kiedy P zamyka trzech mnożników równych, niech Q zawiera dwa takie mnożniki; będzie zrównanie na ledwo-nieftyczną $\alpha t^{n-3}u^3 + \beta t^{n-3}u^2 + \gamma t^{n-2} = 0$, czyli

$$(III.) \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma t = 0,$$

G₂

gdzie

gdzie t , u , stają się nieskończone w granicy swoiwej: a zniszczywszy βu^2 iako niknące przy αu^3 , otrzymamy $\alpha u^3 + \gamma t = 0$.

Niech nakoniec R zamykają iednego mnożnika takiego, iakich P zamykają trzech, i iakich Q zamykają dwa. Dla wyłożonéj już przyczyny przybędzie nam w zrównaniu na ledwo-nieścyczną termin $z S$, a przeto $\alpha t^{n-3}u^3 + \beta t^{n-3}u^2 + \gamma t^{n-3}u + \delta t^{n-3} = 0$, czyli

$$(IV.) \alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = 0.$$

Zrównanie to wyraża trzy albo iedną tylko ledwo-nieścyczną prostą, ieżeli ieden lub trzy pierwiastki są rzetelne nierówne; ostatni przypadek zgadza się zupełnie s tym któryśmy na samym początku tego §. rostrzysłali: skąd się wnosi, że ledwo-nieścyczna wypada ta sama, uważając albo w samym tylko P trzy mnożniki rzetelne nierówne; albo razem w P trzy, w Q dwa, a w R iednego takiego mnożnika. Ale że zrównanie IV. rozległyszym podpada uwagóm iak przypadek najpierwszy tego §: rostrzysłniemy ie wszystkie porządnie. Ieżeli to zamykają ieden tylko pierwiastek rzetelny $u - c = 0$, to iest $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = (u - c)(mu^2 + nu + p) = 0$, kładąc c za u , we wszystkie niknące terminy, odmieniemy zrównanie na

$$(u - c)t^{n-3} + At^{n-4} + Bt^{n-5} + Ct^{n-6} + Dt^{n-7} + \text{i t. d.} = 0,$$

a rozdzieliwszy całe przez t^{n-3} , i odniósłszy potem t do ostatniej granicy; otrzymamy na ledwo-nieścyczną - - $u - c + \frac{A}{t} = 0$, albo $u - c + \frac{B}{t^2} = 0$, albo $u - c +$

$$\frac{C}{t^3} = 0, \text{ - - albo nakoniec } u - c + \frac{V}{t^{n-3}} = 0, \text{ podług}$$

przypadku, że wszystkie terminy zostaną, albo że $A = 0$, albo że $A = 0$, $B = 0$; albo $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$; albo że nakoniec wszystkie terminy prócz ostatniego, będą zero; a gdyby nawet było $V = 0$, zostanie się $u - c = 0$, co nas uczy, że linia prosta która iest granicą

nicą linii podanej, nie jest żadnej innej linii krzywej granicą, a przeto i linia podana nie mieści się w odległości niekończoney z żadną linią krzywą.

Ieżeli zrównanie IV. zamyka dwa pierwiastki rzeczywiste równé, to jest $\alpha u^2 + \beta u + \gamma = (u-c)^2$ ($mu+n$), i ieżeli żaden inny współ-czynnik takowych mnożników nie zawiera, włożywszy za u, c , w wszystkie terminy niknące, przyjdziemy znowu na ledwo-nieistyczną do iednego z takich zrównań $(u-c)^2 + \frac{A}{t} = 0, (u-c)^2 + \frac{B}{t^2} = 0, (u-c)^2 + \frac{C}{t^3} = 0 \dots$

$$(u-c)^2 + \frac{V}{t^{n-3}} = 0.$$

Gdyby zaś współ-czynnik t^{n-4} zamykał iednego takiego mnożnika $u-c$, na ten czas trafilibyśmy na ledwo-nieistyczną zamkniętą w iednym z następujących.

$$(u-c)^2 + \frac{A(u-c)}{t} + \frac{B}{t^2} = 0, \text{ albo } (u-c)^2 + \frac{A(u-c)}{t} + \frac{C}{t^3} = 0, \text{ albo na koniec na } (u-c)^2 + \frac{A(u-c)}{t} + \frac{V}{t^{n-3}} = 0.$$

a gdyby ieszcze $A=0$, B zaś zamykało iednego takiego mnożnika; albo B będąc zero, C zamykało $u-c$, i tak dalej postępując w przypuszczeniu; trafiemy koniecznie na zrównanie wzoru $(u-c)^2 + \frac{A'(u-c)}{t^p} + \frac{B'}{t^q} = 0$, wyrażające ledwo-nieistyczną; gdzie

$$q < n-2; p < q.$$

Przypuśćmy nakoniec że zrównanie IV. zamyka trzech mnożników równych $(u-c)^3 = 0$. kładąc c za u , we wszystkie terminy niknące zrównania podanego między t, u , ieżeli żaden inny termin prócz pierwszego nie zamyka mnożnika $u-c$, trafiemy na zrównanie do ledwo-nieistycznej wzoru $(u-c)^3 + \frac{A'}{t^1} = 0$, $q < n-2$,

$q < n-1$, a jeżeli jeszcze współ-czynnik t^{n-2} zamyka $u-c$, na zrównanie wzoru - - $(u-c)^3 + \frac{A(u-c)}{t^p} +$

$\frac{B'}{t^q} = 0$. uważając zaś drugi termin następnie zero, a w tuż następującym mnożnika $u-c$, trafiemy na zrównanie wzoru - - $(u-c)^3 + \frac{A'(u-c)}{t^p} + \frac{B'}{t^q} = 0$.

Jeżeli zaś oprócz pierwszego terminu zamykającego trzy mnożniki równie, inny który z następnych zamykać będzie $(u-c)^2$, znajdziemy na ledwo-nieścynną zrównanie wzoru $(u-c)^3 + \frac{A'(u-c)^2}{t^p} + \frac{B'}{t^q} = 0$.

Nakoniec jeżeli który s terminów zrównania zamykać będzie dwa, trzeci zaś jaki jednego takiego mnożnika, iakich termin pierwszy zamyka trzech; przydziemy do zrównania na ledwo-nieścynną, którego wzór jest: $(u-c)^3 + \frac{L(u-c)^2}{t^p} + \frac{M(u-c)}{t^q} + \frac{O}{t^r} = 0$.

gdzie $r < n-2$, $q < r$, $p < q$.

Tę wszystkie uwagi terażniejszego §. przystosowaliśmy do zrównania na linie 3go porządku, znajdziemy szesnastie przypadków różnych mogących mieć miejsce już to w mnożnikach samych pierwszego terminu, już w kombinacjach z nim innych terminów zrównania. Skąd J. P. Euler wyciągnął szesnastie rodzajów linii 3go porządku co do liczby i różnej natury ledwo-nieścynnych. Każdy zaś takowy rodzaj mając właściwy wzór swego zrównania, dzielić się może na różne gatunki wypadające s koordycyi wprowadzonych na współ-czynnik terminów, tak iakieśmy widzieli w porządku drugim. Newton który w dziele swoim *Enumeratio Linearum tertii ordinis* uważał własności i różnice linii krzywych w odległości skończonej, naznaczył ich siedmdzieśiat i dwa gatunki; Teorya J. P. Eulera będąc daleko prościęjsza

ściejszą i ogólniejszą, nie tylko większą miała u Geometrów pomyślność, ale nawet dać widzieć, że liczba gatunków przez Newtona podana jest niedokładna. Rostrzajanie wszystkich tych rodzajów linii, będąc tylko przytósowaniem początków teraźniejszego §. do przykładu szczególnego, nie uczyni żadnej trudności, ktokolwiek w całej ogólności teorię tę ogarnął, i przypatrzył się działaniom na linii 2go porządku. Przydadź nam tu tylko należy jedną własność ledwo-nieśtycznych szczególnie z uwag nad liniami 3go porządku wypadającą, która jest wielkiej wagi i na wyższe porządki.

Wystawmy sobie na fig. 29. linią krzywą 3go porządku mającą sześć odnóg nieskończonych, a przeto trzy ledwo-nieśtyczne proste wypadające z trzech mnożników rzetelnych nierównych, w terminie náywyższego wymiaru zawartych. Ponieważ te ledwo-nieśtyczne proste wyrażają się zrównaniami wypadającymi z dwóch pierwszych terminów zrównania podanego, idzie za tem że dwa te terminy P, Q, są wspólne zrównaniu 3go stopnia na linią krzywą, i zrównaniu tegoż stopnia składanemu, które wyraża trzy linie proste. Współ-czynnik zaś iednej ilości odmiennę w Q, będąc równy summie pierwiastków, wyrażać będzie razem przystawy do linii prostej, i przystawy do linii krzywej należące. Z równości tych przystaw zastanówmy się, czy iaką ważną własność nie wypadnie. Na ten koniec wystawmy sobie dwa zrównania 3go stopnia.

$$y^3 + (bx+e)y^2 + (cx^2+fx+h)y + dx^3 + gx^2 + ix + k = 0 \quad \dots (A').$$

$$z^3 + (bx+e)z^2 + (cx^2+fx+H)z + dx^3 + gx^2 + lx + K = 0 \quad \dots (B').$$

s których pierwsze (A') wyraża linią krzywą 3go porządku mającą sześć odnóg nieskończonych: drugie zaś (B') wyraża trzy linie proste: dla tego współ-czynnik H, I, K, wystawmy sobie takie, żeby to zrównanie mogło się rozebrać na trzy pierwszego stopnia; będzie więc na fig. 29. $PL+PM+PN = -bx-e$, $PF+PG+PH = -bx-e$, a przeto $PL+PM+PN = PF+$

G4

PG+

Uwaga nad le
dwo-nieśty-
cznymi wyli-
czonemi.

Fig. 29.

Fig. 29.

$PG+PH$, czyli przywiódłszy je do zero:

$$FL-GM+HN=0, \text{ i podobnie } fn-gm+hl=0. -$$

każde s tych zrównań zamyka kondycją wyrażającą istotną cechę ledwo-nieftycznych, to jest: jeżeli przyftawa czyli linia profta iakakolwiek przecina we trzech miéyftcach odnogi krzywé i ledwo-nieftyczne; dwa odcinki téy linii proftéy między ledwo-nieftycznými i odnogami krzywými zawarte, równe są trzeciemu odcinkowi idącemu w stronę przeciwną. W liniach więc 3go porządku gdzie trzy zachodzą ledwo-nieftyczne, trzy odnogi linii krzywéy nie mogą zmierzć ku iednéy stronie z ledwo-nieftycznými, ale jeżeli dwie wykierowane są względem odnogi ku pewnéy iakiéy stronie, trzecia musi bydź wykierowaną przeciwnie: i tak n.p. na fig. 29. odnoga SM nie może przechodzić za G, żeby się ftatą wklęła do ledwo-nieftycznéy BG; boby zrównanie $FL-GM+HN=0$ nie miało miéyftca w takowém przypadku. Stad się wnośi iż nie może bydź żadnego rodzaju w liniach 3go porządku mającego

Fig. 29.

dwie ledwo-nieftyczne wzoru $u=\frac{A}{t^2}$, a iedną tylko

wzoru $u=\frac{A}{t}$, bo $u=\frac{A}{t^2}$ będąc nieśkończenie mniéy-

szém od $u=\frac{A}{t}$; bydź nigdy nie może, aby dwie takie

wyrównać miały iedną ledwo-nieftycznę $u=\frac{A}{t}$:

ale jeżeli się iedna $u=\frac{A}{t}$ znáyduie przy innych wzo-

ru $u=\frac{A}{t^2}$; drugą takż znáydować się także musi.

A jeżeli niemaż. żadnéy ledwo-nieftycznéy $u=\frac{A}{t}$; le-

dwo-nieftyczna $u=\frac{A}{t^2}$ nie może się nigdy sama znaydować

dować przy innych $u = \frac{A}{t^3}$, i ogólnie żadną ledwo-nieftyczną niższego porządku, nie może się znajdować sama przy ledwo-nieftycznych porządków wyższych.

Ciągnać dalej teorią ledwo-nieftycznych na cztery mnożniki rzetelne w terminie. P náywyższego wymiaru, i tę stosując do zrównania na linie 4go porządku, uważaćby nam przyszło w niem następujące przypadki. *Náprzód*: kiedy termin náywyższego wymiaru zamykają wszystkie cztery mnożniki uroione, *Powtóre*: kiedy zamykają dwa rzetelne nierówne, a dwa uroione. *Potrzedie*: dwa mnożniki rzetelne równe, a dwa uroione. *Poczwarte*: wszystkie cztery mnożniki rzetelne i nierówne. *Popiąte*: mnożniki rzetelne dwa równe, a dwa nierówne. *Poszosté*: dwa mnożniki równe, i dwa drugie równe, ale każda para od siebie różna. *Posiodmne*: kiedy trzy mnożniki rzetelne równe, a czwarty nierówny. *Posóme*: kiedy wszystkie cztery mnożniki rzetelne między sobą równe. W każdym z takowych przypadków uważając terminy niknące, a biorąc inne na ich miejsce, powtóre rościągając mnożniki do dalszych terminów, wynależlibyśmy wiele rodzajów linii krzywych: a przeszędzimy przez wszystkie, pokazałoby nam się 146 rodzajów linii krzywych 4go porządku różniących się ledwo-nieftycznymi, czyli odmianami, którym podlegają w ostatnich granicach współ-ufzykowanych. Każdy zaś takowy rodzaj uważając w odległości skończony, odkrylibyśmy gatunki do niego należące. Idąc do wyższych porządków liczba rodzajów wzrastać będzie co raz barziéj, dla tego że się liczba kombinacyi w mnożnikach znacznie powiększa.

§. XXI.

Granice ilości wzrastających odkryły nam tyle znakomitych cech i własności w liniach krzywych: obiecywać sobie można, że są jeszcze inne przymioty, które od granic ilości ubywających zawiśły. A iako-

O granicach
ilości ubywa-
jących, i od nich
zawisłych wła-
snościach linii
krzywych.

tamte wypłynąwszy ze stycznych prowadzonych do odległości nieskończonęj należały do odnóg bez końca się ciągnących; tak teraznięjsze stółniąc do stycznych pewnych łuków, odkryć nam mogą charaktery linii krzywych w odległości skończonęj. Potrzebaby nam więc do niniejszych uwąg, w zrównaniu na linie iakiegokolwiek porządku, ilości odmiennę przywieśdź do stanu ciągłego i nieprześcannęgo ubywania. Stan takowy ubywania współ-ufzykowanych zmniejsza łuk linii krzywęj, a w ostatnięj granicy przywodzi go do punktu, lub do stycznej międzaiący się z dwiema przyległemi punktami linii krzywych. Skąd nam łatwo przewidzieć, że własności punktów różno-rodnych iakimi są punkta podwójnē, potrójnē, poczwórne i t. d. powtórē, sposob oznaczenia i prowadzenia stycznych, zawisły od teoryi granic ilości ubywaających. A iako w granicach wzrostu z ledwo-niestycznych prostych wynadowaliśmy innē linie krzywē międzaiące się w odległości nieskończonęj z linią podaną; tak doświadczac będziemy, ieżeli teoryą granic ilości ubywaających nie nauczy nas o zamianie łuków iednēj linii krzywēj na drugą, a przeto ieżeli nie odkryje nam sposobu równania linii zawiłējszych s prościējszemi. Zagłębmy się we wszystkie tē uwāgi, mając na pamięci tē wszystkie początki, któreśmy o ostatnich granicach wzrostu lub ubywania ilości odmiennych na początku tego rozdziału wyłożyli.

Wiemy że ilości odmiennē mają (o) za granicę ciągłego ubywania: niech będzie zrównanie $W=0$ nāyogólniējsze między dwiema ilościami odmiennemi x , y , iakiegokolwiek stopnia; $y=0$ daie nam zawsze przecięciā linii krzywēj od ośi; zaś $x=0$ przecięciā tēż linie krzywēj od przystawy wychodzącej s początku odcinków: ieżeli więc w liniach krzywych znaydują się takie własności przywiązane do dwóch granic, tē wypaśdź nam koniecznie muszā s terazniējszēj teoryi: a iako $x=\infty$, $y=\infty$ granicach

cach wzrostu dały nam stosunek $\frac{y}{x}$ skończony; tak i

teraz $x=0$, $y=0$, dadzą nam także stosunek $\frac{y}{x}$ skoń-

czony, wyrażający tę własność od granic zawistą. Albowiem podług §. 16. Algebry wyraż $\frac{y}{x}$ pokazuje wartość skończoną. Jeżeli więc na fig. 30 odcinkowi $AP=x$ odpowiada przyłtawa $PM=y$ taka, iaką wyraża zrównanie $W=0$, nazwawszy te wartości punktowi M odpowiadające $x=p$, $y=q$; p, q uczynić powinny zadofyć zrównaniu (§. 5. Algeb.) a przeto włożywszy p za x , q za y , wszystkie terminy zniszczyć. Poprowadziwszy teraz przez M równoległą osi MS , i nazwawszy $MS=t$, $SN=u$, $x=p+t$, $y=q+u$, i te wartości włożywszy w zrównanie $W=0$, oś zaś AP przeniószy na MO , początek odcinków na M ; ponieważ p, q , były pierwiastkami do punktu M , i tam całe zrównanie przywiodły do zero, ten zaś punkt M jest teraz początkiem odcinków na osi MO ; więc u niego współ-ufzykowane p, q , znikną, i niezoftaną się w zrównaniu $W=0$, tylko terminy będące funkcją t, u ; to jest, zrównanie $W=0$ kładąc $x=p+t$, $y=q+u$ ftanie się:

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Gt^3 + Ht^2u + Itu^2 + Ku^3 + Lt^4 + i \text{ t. d. } = 0 \quad (\lambda).$$

gdzie A, B, C, D , i t. d. są ilościami ftatecznemi: to zaś zrównanie wyraża tę samą linią krzywą, którą wyrażało $W=0$, ale współ-ufzykowane które przedtém należały do osi AQ , teraz należą do MS , i p, q , są teraz nieodmienné. Im punkt N zbliża się barziéy do punktu M , tém t czyli MS , co ráz barziéy maleje, tém punkt N linii krzywey, zbliża się barziéy do punktu L linii prostey; a przeto łuk MN do linii ML : linia więc prosta ML jest granicą łuku MN , do której się ten łuk coráz barziéy zbliża, ale której nigdy nie może doftać, nie odmieniwszy swéy natury. Odniósłszy w zrównaniu (λ) ilości ubywaiaące t, u ,

Gó

do

Fig. 30.

do swych ostatecznych granic, wszystkie potęgi wyższe znikną przed najniższą, i zostanie się $At+Bu=0$; aże współ-ufykowane MS , NS , dosięgnąwszy ostatecznych granic swęgo ubywania łuk MN zmięnia się na styczną ML , przeto $At+Bu=0$ jest zrównaniem na styczną ML . Każdą więc styczną jest granicą łuku niknącego; ma bowiem dwa punkta wspólne z linią krzywą: zmniejszając co raz barziej łuk linii krzywej, zbliżamy się do tych punktów tuż przyległych, ale tych dwóch punktów nie możemy dosięgnąć, chyba że linia krzywa całą naturę odmięni. Dwa bowiem punkta tuż przyległe, czyli mówiąc ięzykiem geometrycznym, dwa punkta niekończenie bliżkie nie czynią linii krzywej; bo wiemy z Rozd. I. że tylko sama linia prosta oznacza się dwiema punktami, ale linia krzywa najprościęjszą potrzebuie ich więcej. Jeżeli do poznania natury linii krzywej szukamy tylko jednego punktu, i ten wyraziliśmy zrównaniem, czyli iak się tłómaczyli dawni Geometrowie znalazłszy miejsce geometryczne tego punktu, mamy zrównanie na linią krzywą, przeistacimy na iednym punkcie dla tego, że wszystkie inne punkta uważamy takim prawem opisane do iakiegośmy przyszli w zrównaniu, i że ten punkt przez funkcją ilości odmiennych, wyraziwszy, to samo prawo odmięni rościągamy do wszystkich innych punktów. Powtóre do oznaczenia linii krzywej potrzeba nam koniecznie wiedzieć prawo, podług którego odmięni się punkt tę linią krzywą opisując; jeżeli mamy zadanie i kondycye iakie do niego przywiązane, i jeżeli te kondycye są wystarczające, zamykają w sobie ukryte prawo ciągłości, które my tylko tłómaczemy na znaki szukając zrównania, a przeto dosyć nam jest takowe prawo znane s kondycyi pytania do iednego punktu przywiązać, aby całą linią poznać. Ale wystawmy sobie że mamy łuk iakiej linii krzywej z nikąd nieznanej, a chcąc doysść prawa podług którego taká linia jest opisana, muhelibyśmy prowadzić

prowadzić wespół-ufzykowane przez wielką liczbę punktów, a znacząc ich odmiany, trzeba by nam w tych odmianach iakiegoś upatrywać prawa i związku, a tén dostrzegłszy, dopiero byśmy przyszli do poznania linii podanej. W takim przypadku postawiwszy tę myślą, nigdy by nam dwa, ani trzy, ani nawet cztery punkta tuż przyległe nie wystarczyły do poznania linii krzywey, co nie tylko należałoby przypisać słabości naszego umysłu, ale nawet naturze rzeczy. Idąc bowiem od punktu linii krzywey do tuż przyległego, różnica dwóch położeń iest tak małą, że iey z żadną skończoną ilością porównać niepodobną, i póty nie może bydź dostrzeżoną, póki skończonę iakię nie doydzie miary; to iest póki pewnego łuku linii krzywey nie przejdziemy; łuku zaś takiego, który istotnie do tey a nie inzey linii należy. Na łuk zaś taki trzeba nam pięć punktów w linii 2go porządku, 9 w linii 3go i t.d. podług §. VI. Ieżeli więc dwa punkta tuż przyległe nie, czynią nigdy linii krzywey, poznamy łatwo że uważać linią krzywą iako złożoną z linii prostych nieskończenie małych, prowadzonych do każdych dwóch punktów przyległych, nie iest to uważać ią geometrycznie, bo taká uwaga iest przeciwná pierwszym początkom Geometrii. Możemy iey użyć kiedy idzie o iaki wymiar n.p. płaszczyny linią krzywą zamkniętę, lub o iaki praktyczny rachunek, nie mogąc tego rachunku drogą ściśłości geometryczney dostąpić, iak przymuszeni iesteśmy czynić prawie we wszystkich zadaniach fizyki, stóluiąc Geometrią do skutków Przyrodzenia; ale to iest tylko droga zbliżania podobná do tey, iakąśmy fzli w szeregach nieskończonych. Nigdy zaś nie można tych przypuszczeń używać do dowodu iakię prawdy ogólney, boby té naprzód przy czystém rozumowaniu nigdy nás do prawdy ściśley nie przywiodły, a przy nieostrożności stałą się źródłem przeciwnych wypadków, lub fałszywego dowodu. S tych uwag których dotąd nie starano się w swém świetle wystawić,

wytworzyć, rozładzemy łatwo tyle błędnych dowodów, rossianych między najsłabsze Geometrii prawdziwej od wielu Autorów.

Spółśób wynay
dowaniá pod-
stacychnych w
liniach krzy-
wych,

Dwa punkta tuż przyległe w linii krzywey oznaczają położenie styczney, która przeciągnięta pokazuje na tym miejscu kierowność punktu opisującego linią krzywą: gdyby ta kierowność została nieodmienną, punkt opisałby linią prostą: ale że ta kierowność odmiennia się idąc od każdego punktu do tuż przyległego, powstaie stąd linia krzywa, którą można uważać opisaną od punktu odmienniającego w każdym miejscu swoję kierowność, tę zaś kierowność pokazuje styczna u każdych dwóch punktów przyległych linii krzywey. Przeniółszy oś linii krzywey i początek odcinków do tego samego punktu dotykając się, a odniósłszy ilości odmiennę do swych granic ubywania, zrównanie na styczną jest $At + Bu = 0$, skąd

Fig. 30. $\frac{u}{t} = \frac{-A}{B}$; s podobieństwa trójkątów LSM, MPT mają

my $LS:MS = MP:PT = -A:B$, przeto $PT = \frac{-Bq}{A}$ zrównanie ogólne na wynalezienie PT, którą nazwano

Ponstyczną (*Subtangens*), a przeto na prowadzenie styczney do jakiejkolwiek linii krzywey: spółśób ten ogólny prowadzenia stycznych zamykają się w następującym prawidle.

„Mając zrównanie podane na linii krzywą, połóż „naprzód q za y , p za x ; skąd powstanie związek „na p, q , czyniący zadość zrównaniu w punkcie M : „powtóre w toż zrównanie podane połóż powtór- „nie $x = p + t$, $y = q + u$; wymaż naprzód te terminy, „które wypadły na zadość uczynienie w pierwszym „przerabianiu zrównania, potem opuść wszystkie „potęgi wyższe t, u , i zostanie się $At + Bu = a$, skąd „ $\frac{-Bq}{A}$ daie podstyczną, a przeto położenie styczney „do punktu danego,

Przykład

Przykład na Parabolę: Zrównanie na linią krzywą $y^2 = 2ax$ kładąc naprzód p za x , q za y , zamienia się na $q^2 = 2ap$; powtóre kładąc $x = p + t$, $y = q + u$; zamienia się na $q^2 + 2qu + u^2 = 2ap + 2at$, aże $q^2 = 2ap$, opuszczam te terminy w ostatniem zrównaniu, po-
tém u^2 ; i zostaje mi się $at - qu = 0$. skąd $\frac{u}{t} = \frac{a}{q} =$

$$\frac{-A}{B}, PT = \frac{-Bq}{A} = \frac{q^2}{a}, \text{ aże } a = \frac{q^2}{2p}, \text{ więc } PT = 2p:$$

podstyczna więc jest dwarazy większą od odcinku.

Przykład na Hyperbolę: Niech będzie zrównanie na linią krzywą $y^2 = \frac{k^2}{g^2}(x^2 - g^2)$, czyli $y^2 g^2 = k^2 x^2 - k^2 g^2$, kładąc p za x , q za y ; zamienia się na $q^2 g^2 = k^2 p^2 - k^2 g^2$ - - - (a); kładąc powtóre $x = p + t$, $y = q + u$, zamienia się na $g^2 q^2 + 2g^2 qu + g^2 u^2 = k^2 p^2 + 2k^2 pt + k^2 t^2 - k^2 g^2$; wymazawszy naprzód terminy zamknięte w zrównaniu (a), powtóre potęgi wyższe t , u , zostanie się $k^2 pt - g^2 qu = 0$; przeto $A = k^2 p$, $B = -g^2 q$; $PT = \frac{-Bq}{A} = \frac{g^2 q^2}{k^2 p}$, aże z zrównania (a) mam $k^2 = \frac{q^2 g^2}{p^2 - g^2}$, więc $PT = \frac{p^2 - g^2}{p}$, co się właśnie zgadza z wypad-

kami Rozdziału 2go. Tym sposobem na wszystkie linie krzywe, których zrównania przywiesdz się mogą do wyrazu całkowitego zniszczywszy ułamki; i do wyrazu wymiernego zgubiwszy znaki pierwiastkowe; mamy sposób ogólny prowadzenia itycznych. Lubo zaś terazniejszy sposób stosowaliśmy do współużytkowanych pionowych, ma on jednak to samo użycie i w ukośnych, które możemy łatwo za pomocą trygonometrii przerobić.

§. XXII.

Znaleźliśmy dopiero podstyczną $PT = \frac{-Bq}{A}$, A , B ,
będąc

Sposób rozpoznawania punktów dwójstych, i trojstych w liniach krzywych

Fig. 10.

będąc współ-czynnikami równania $At + Bu = 0$; gdyby w tym wyrazie podstyczeń byłoby $A = 0$, PT wypadłaby nieskończoną, i na ten czas kat PTM zniknąłby, styczna stała się równoległą osi TQ : gdyby zaś było $B = 0$, PT stała się także $= 0$; co nas uczy, że punkt T przypada w samym początku odcinków, skąd wychodząca przystawa jest styczną linii krzywej. S. tych dwóch uwag wypada nauka bardzo wielkiej wagi w Matematyce wyższej o przystawach NAWIEKSZYCH I NAYMNIĘSZYCH (*De maximis & minimis*). Zauważmy sobie za przykład Ellipsę lub koło, w nich kiedy styczna stała się równoległą osi, pokazuje miejsce przystawy największej, po której idące inne zmniejszają się, a przeto pokazuje razem największe wzniesienie się linii krzywej nad oś: kiedy zaś styczna stanie się równoległą przystawom, pokazuje odwrót linii krzywej i przystawę najmniejszą. Te zaś poznawania zwrotu lub wyniosłości linii krzywych są wielkiego bardzo użycia do poznania ich ryfunku w odległości skończony. Szukając przez sposób §. poprzedzającego podstyczeń na Ellipsę, którego równanie $y^2 g^2 + k^2 x^2 = k^2 g^2$, kładąc naprzód p za x , q za y , wypada $g^2 q^2 + k^2 p^2 = k^2 g^2$ -- (β). powtóre kładąc $x = p + t$, $y = q + u$, znajdziemy na $At + Bt = 0$, $g^2 qu + k^2 pt = 0$. gdzie $A = k^2 p$, $B = g^2 q$. Podstyczeń $PT = \frac{-Bq}{A} = \frac{-g^2 q^2}{k^2 p}$, kiedy w Ellipsie styczna jest równoległą osi $PT = \frac{1}{g}$, bo $A = 0$, czyli $k^2 p = 0$. gdzie k nie mogąc być zero, wypada $p = 0$: wprowadziwszy w równanie (β) kondycją $p = 0$, wypada $q = \pm k$, to jest że przystawa największa jest równa pół-osi mniejszej. Kiedy zaś w Ellipsie styczna stała się równoległą przystawom, na ten czas $B = 0$, czyli $g^2 q = 0$, gdzie znowu nie może być tylko $q = 0$: wprowadziwszy

wszy tę kondycją w zrównanie, otrzymamy $p = \pm g$; to jest że odcinek náywiększy, jest równy pół-osi większej, a iako na każdą s tych náywiększych ilości dwie wypadły wartości, przeto dwie są przystawy náywiększe w Ellipsie pokazujące dwa podniesienia się linii krzywéy iedno nad, drugie pod osią; powtóre dwa odwroty téyże linii krzywéy na obydwóch końcach osi większej. W tych zaś przypadkach widzemy, że w Ellipsie takim zrównaniem opisaney odcinkowi náymnieyszemu odpowiada przystawa náywiększą, a przystawie náymnieyszey odcinek náywiększy. Ponieważ więc w téy teoryi wypadają razém rzeczy náymnieysze i náywiększe, chcąc ią do zupełney ogólności i doskonałości przywiesdź, potrzebaby wynaleśdź prawidło na rozeznanie w każdym przypadku kiedy i co wypadá náymnieysze, a kiedy i co náywiększe. Bo ieszcze należy nám ostrzec, że nie zawsze wypadá przystawa linii krzywéy náywiększą, kiedy styczná jest równo-ległą osi; i nie zawsze náymnieyszą, kiedy jest równo-ległą przystawom: ale w pierwszym przypadku bydź może náymnieyszą, w drugim náywiększą. Wystawmy sobie że linią krzywą má taki ryfunek iaki nám pokazuje fig. 31. w punkcie A przystawa będzie náymnieyszą, chociaż tam styczná LM jest równo-ległą osi; a w punkcie O może bydź náywiększą, albo ani náywiększą ani náymnieyszą, chociaż styczná jest równo-ległą przystawie PA . Té wszystkie przypadki potrzebuia náyogólnieyszych prawideł na rozeznanie iednych od drugich: i czynią tę teorią iedną z náyobszernieyszych w rachunku Diferencyalnym, do którego ią odkładamy. Będzie nám miło w obszerném tam wyłożeniu téy nowéy teoryi, i iey użyciu dadź poznać wysokie wynalázki Wielkich wieku naszégo Geometrów Mac-laurin, dela Grange, Eulera. Wróćmy się do pierwszych uwag nad stycznymi.

Fig. 31.

Widzieliśmy już wypadające wartości stycznych,

H

czyniąc

czyniąc w równaniu $PT = \frac{-Bq}{A}$, $A=0$ samo, potem B samo $=0$. uczynimy teraz razem $A=0$, $B=0$; równanie na podstyczną stałe $\frac{0}{0}$ i równanie na styczną $\frac{u}{t} = \frac{-A}{B} = \frac{0}{0}$. Wyrząd ten $\frac{0}{0}$ podług §. 16. Al-

gebry jest wyrazem nieoznaczonym ostrzegającym nas, że po wynalezieniu stycznych wrócić nam się potrzeba do pierwszego równania (λ). §. 21: tam uczyniwszy $A=0$, $B=0$, dwa terminy najniższego wymiaru nie będą się znajdować w równaniu, ale na ich miejsce $Ct^2 + Dtu + Eu^2$ są terminami wymiaru najniższego, przed którymi inne potęgi nikną, a które przeto dadzą nam powinny wartość styczney. Równanie więc na styczną jest $Ct^2 + Dtu + Eu^2 = 0$ (γ). to równanie rozebrać się może na dwa pierwszego stopnia rzetelne lub urojone, równe lub nierówne. Jeżeli $D^2 > 4CE$, dwa pierwiastki równania (γ) są rzetelne nierówne, każdy z nich wyraża styczną do punktu M ; więc do punktu M należą dwie styczne osobne i różne, a przeto muszą być dwa łuki linii krzywey przecinające się w punkcie M , iakie nam maluje fig. 32. N°. 1°. VM , NM , do których prowadzone styczne LM , HM , pokazują kierowność każdego łuku w punkcie M , który jest punktem dwoistym.

Fig. 30.

Fig. 32. N°. 1.

Jeżeli $D^2 = 4CE$ równanie (γ) zamyka dwa pierwiastki równe rzetelne, co nas uczy, że obydwie styczne LM , HM , zeszły się razem, i odnogi dwie linii krzywey w punkcie M wzięty jedną kierowność, czyli te odnogi dotykają się s. sobą w punkcie M .

Jeżeli zaś $D^2 < 4CE$ dwa pierwiastki równania (γ) są urojone, co nas uczy że M znaczy odnogę iaykowatą zamienioną w punkt dwoisty sprzeczony §. 2. Każdą więc linią krzywą w której równanie (γ) ma miejsce, zamyka punkt dwoisty, w którym albo się dwie odnogi przecinają i czynią węzeł, albo się

się dotykaia: albo nakoniec ten punkt dwoisty jest punktem sprzężonym: podług troiakoiego gatunku pierwiastków (γ).

Gdyby ieszcze w zrównaniu (γ) nie tylko A , B , ale C , D , E , były $=0$, na ten czas terminy $Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + lu^3$ bytyby wymiarem najniższym przed którym wszystkie inne wyższe zniknawszy, mielibyśmy $Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + lu^3 = 0$. . . (δ) to zrównanie mogąc się rozebrać na trzy pierwszego stopnia, odkryje nam punkt troisty w M ; to jest albo taki, przez który przechodzić będzie jedna odnoga linii krzywéy, i gdzie razém drugą zamięniła się w punkt sprzężony, jeżeli zrównanie (δ) má ieden pierwiastek rzetelny a dwa uroione; albo punkt taki, w którym się trzy odnogi linii krzywéy przecinaia, jeżeli trzy pierwiastki są rzetelne nierówne; albo punkt w którym się trzy odnogi dotykaia, jeżeli pierwiastki rzetelne są wszystkie równe: albo na koniec punkt, w którym się dwie odnogi dotykaia, a trzecia ie przecina, jeżeli dwa pierwiastki rzetelne są równe, a trzeci nierówny. Zawsze zaś linia prosta przechodząc przez punkt M troisty przecina linia krzywą w trzech miejscach, tak iak przecinaiać ią w punkcie dwoistym uważana bydz ma iak gdyby w dwóch miejscach też linia krzywą przecięta. Idąc dalej za tém rozumowaniem, możemy sobie ieszcze wystawić, że wszystkie terminy zrównania (δ) są zero, a na ten czas przypadnie nam wziąć na stycznią z zrównania (λ) terminy składające czwarty wymiar: takowe czwartego stopnia zrównanie rostrząsaiać, znaydziemy mu punkt odpowiadający poczwórny, powstaiący albo z dwóch punktów sprzężonych, albo czterech odnóg się przecinaiających lub dotykaiących, albo s czterech odnóg s których dwie się dotykaia, a dwie inne ie przecinaia w tymże samym punkcie. Przeciawszy linia krzywą w takowym poczwórnym punkcie, uważać w tém przecięciu należy, że linia

H₂

prosta

prosta w czterech punktach przecięcia krzywą. Stąd łatwo nam bardzo ułożyć równania ogólne na linie krzywe mające punkta pojedyncze, dwoiste, poczworne, i t. d. Zaisze żeby równanie wyrażało linią krzywą mającą punkt pojedynczy, potrzeba naprzód, żeby to mogło być przywiedzione do zero, położwszy p za x , q za y : powtóre żeby kładąc za x , $p+t$, za y , $q+u$; odmieniło się na równanie między t , u , takie, któreby w ostatnich granicach ilości ubywających zamienić się mogło na $At+Bu=0$, a przeto wyraziwszy takie równanie przez $P(x-p)+Q(y-q)=0$, P i Q bydz powinny funkcyami x , y , i całe równanie nie powinno być rozdzielne przez $x-p$, ani przez $y-q$; potrzeba bowiem zawsze aby to równanie przerobione na t , u , wzięło wzór równania (λ). Podobnie równanie na linią krzywą mającą punkt dwoisty wyrazić możemy przez $P(x-p)^2+Q(x-p)(y-q)+R(y-q)^2=0$, w którym P , Q , R , bydz powinny koniecznie funkcyami x , y , całe zaś równanie nie powinno być rozdzielne ani przez $x-p$, ani przez $y-q$. Skąd łatwo poznaemy że linie 2go porządku nie mogą mieć punktu dwoistego, w nich bowiem P , Q , R , musiałby bydz funkcyami stałcznemi; a przeto równanie podane nie na linią krzywą, ale byłoby na dwie linie proste. Jeżeli ieszcze linią krzywą mającą punkt troisty opisujemy równaniem - - - $P(x-p)^3+Q(x-p)^2(y-q)+R(x-p)(y-q)^2+S(y-q)^3=0$; P , Q , R , S , bydz powinny funkcyami ilości odmiennych; powtóre całe równanie nie powinno być rozdzielne przez $x-p$, ani przez $y-q$; dla czego linie 3go porządku nie mogą mieć punktu troistego; ale iako porządek trzeci jest najniższy, który mieć może punkt podwójny; tak porządek czwarty najniższy, który mieć może albo jeden punkt troisty albo dwa dwoiste. Co nam łatwo jest rościagnąć do linii krzywych porządków wyższych, to jest: że linia porządku n nie może mieć punktów mnogości większej od $n-1$.

§. XXIII.

Uważając odnogi nieskończone w liniach krzywych przez granice ilości wzrastających doświadczyliśmy, iż zrównanie podane zniżywszy w niem wszystkie terminy niższych wymiarów, prócz dwóch pierwszych dały nam ledwo-nieścyczną prostą; ocaliwszy zaś w niem większą liczbę terminów, wypadła ledwo-nieścyczna krzywa miążsająca się w odległości nieskończonej z linią podaną. Te zaś ledwo-nieścyczne krzywe daleko nam lepiej wydawały własności linii podanej iak ledwo-nieścyczne proste. Podobnie w terażniejszych dociekaniach ocaliwszy

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + Iu^3 + Kt^4 + it. d. \quad (\lambda).$$

zrównanie pozostałe wyrazi nam linią krzywą, której większą liczba punktów przyśtanie do linii podanej. Kiedy bowiem linii iakię krzywą odnoga dotknie się odnogi innej linii krzywej, dwa małe łuczki tych linii zmięszają się tak, iż ich krzywizna a przeto kierowność punktu opisującego takie łuczki, stanie się ta sama; podzieliwszy przeto linią krzywą podaną na takie łuczki tuż sobie przyległe, uważać ją możemy iako złożoną z elementów drugiej linii krzywej odmieniającej swoje położenie na każdy takowy łuczek, to jest odmieniającej ilość stateczną, którąśmy linią porównania nazwali w §. 7. Aże z odmiany takowej statecznej ilości rodzą się linie krzywe podobne, przeto każdą linią iakiegokolwiek bądź porządku równając ją sposobem opisanym z inną linią krzywą, uważać możemy iako złożoną z łuczków podobnych tej ostatniej. Do takowego równania obrać nam naprzód należy linią krzywą, w której zrównanie nie wchodzi tylko jedna ilość stateczną, powtóre której własności są nam znane najlepiej, i której nakoniec odryfowanie jest łatwe. Wszystkie te korzyści zawiera koło, s. którym równając inne linie krzywe, uważać je możemy iako

H₂

złożone

Równaia się
linie krzywe
s kołem,

złożone z łuczków kół podobnych, czyli kół odmiennających zawsze swoje promienie. A ponieważ wiemy z Geometrii początkowej, że obwód czyli KRZYWIZNA KOŁA (*Curvatura*), jest w stółunku spaczonym promienia, znalazłszy na każdy łuczek linii podanej odpowiadający promień koła, będziemy wiedzieli krzywiznę linii podanej w każdym miyscu. I tén to wynalazek promienia odmiennego zawiera w sobie całe rozwiązanie niniejszego zadania. Koło takowe którego łuki odmiennych promieni przystają do łuków linii podanej nazywa się (*Circulus osculator*) KOŁEM ŚCISKAJĄCEM, a promień jego odmienny má imię PROMIENIA ŚCISKANIA, albo PROMIEN KOŁA PRZYSTAJĄCEGO (*Radius osculi*; *Radius Curvedinis*). Przenieśmy te uwagi do zrównania (λ) i do faméy teoryi granic. Kiedyśmy zmniejszyli na fig. 30. łuk MN aż do ostatniego zniszczenia i zamienienia go na styczną, współ-ufzykowane t , u , takowemu zmniejszaniu odpowiadające powinny być przywiesdz zrównanie (λ) do zrównania na styczną ML, czyli wszystkie terminy powinny być zniknąć przed $At+Bu$: kiedy zaś łuk MN zmniejszał będziemy nie aż do zamienienia go na linią prostą, ale na łuczek innéy linii krzywéy, granice ubywania stają się mniéy odlegte, bo się u nich więcéy punktów zostaje z linii podanej; zostanie się bowiem cały element, czyli łuczek mały téy linii; a przeto w tych granicach zostać się także powinno więcéy terminów z zrównania (λ), i jeżeli potęgi náywyższe znikną, tuż następująca potęga po pierwszéy powinna ocalać; tu bowiem linią krzywą zamieni się w małym łuczku na inną linią, ale nie przestanie bydz krzywą; przeto zrównanie (λ) powinno się także odmienić na inné zrównanie, ale nie powinno przestać wyrażać linii krzywéy. S czégo przekonać się musimy, że zrównanie (λ) odnosząc do tych bliższych granic ilości odmienné; powinno nám zostawić dwie náy-

Fig. 30.

naybliższe siebie potęgi tychże ilości, to jest:
 $At+Bu+Ct^2+Dtu+Eu^2=0$, albo $Ct^2+Dtu+Eu^2+ Ft^3+Gt^2u+Htu^2+lu^3=0$, gdyby pierwsza potęga nie
 znajdowała się w równaniu: i t. d.

Chcąc zaś tym sposobem iedną linią krzywą zamieniać na łuki innéj linii krzywéj n. p. koła; muszemy ós przenosić na linią spólną obydwóm krzywym. Mieysce to współ-ufżykowanych nayprzyzwyczajey służy promieniowi koła, s którem linią podaną zakładamy sobie równać: promień koła, wiemy że jest zawsze pionowy na iego stycznią: a ieżeli łuk koła zmiejsza się z łukiem linii krzywéj podanéj, linią podaną będzie miała s kołem spólną stycznią, a przeto na ten czas pionową do styczney będzie razem promieniem koła miejszającego się w małym łuczku z linią podaną. Naypierwizą więc jest rzeczą oznaczyć położenie linii MQ pionowey na stycznią TL, do każdéj linii krzywéj. Maiąc zaś na linią MQ ieden punkt zawsze dany M, całe iéy oznaczenie zawiśło od wynalezienia drugiego punktu Q, w którym ós przecina, czyli od znalezienia odległości PQ, którą nazwano Pod-pionową (*Subnormalis*). Potrzeba więc wartość na PQ wyciągnąć z równania (λ), co jest barzo łatwo za pomocą styczney ML, na którą równanie $At+Bu=0$; trójkąty bowiem TMP, PMQ, MSL, będąc podobne prowadzą nás do następującej proporcyi:

$$MS:SL::MP:PQ, \text{ aże } MS:SL=\frac{t}{u}=\frac{-B}{A}; MP=q;$$

$$\text{więc } -B:A=q:PQ \text{ -- } PQ=\frac{-Aq}{B}.$$

Przykład na Parabolę. Wynaleśdź podpionową na linią krzywą opisaną równaniem $y^2=2ax$; kładąc q za y , p za x , mamy $q^2=2ap$; kładąc powtórę $y=q+u$, $x=p+i$, mamy równanie $q^2+2qu+u^2=2ap+2at$, skąd $qu+at=at+Bu=0$, a przeto $PQ=-a$, to jest pod-pionowa jest linią nieodmienną w Parabo-

H4

li i

Fig. 30.

li i równą połowie linii równania, cośmy już zna-
leżli w §. XIV.

Mając w każdej linii krzywéy PQ; mamy razem
 $MQ = \sqrt{(MP^2 + PQ^2)}$, aże $TM = \sqrt{(PT^2 + PM^2)}$

$$PT:TM = PM:MQ \quad \dots \quad MQ = \frac{PM}{PT} \sqrt{(TP^2 + PM^2)}.$$

Przenieśmy wśpół-ufzykowane $MS=t$, $SN=u$, na
linią pionową MQ, i nazwiemy $MR=z$, $RN=w$:
zrównanie $At+Bu=0$ odkryło nam styczną kąta

$$LMS = \frac{u}{t} = \frac{-A}{B}, \text{ iego więc wstawia } = \frac{-A}{\sqrt{(A^2+B^2)}},$$

$$\text{Dostawa } = \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2)}}, \text{ od R spuściwszy pionową}$$

$$\text{RO na nową oś, i RH równo-ległą MS, mamy } MC = \frac{-Az}{\sqrt{(A^2+B^2)}}, \text{ RO} = \frac{Bz}{\sqrt{(A^2+B^2)}}, \text{ NH} = \frac{-Au}{\sqrt{(A^2+B^2)}},$$

$$\text{RH} = \frac{Bw}{\sqrt{(A^2+B^2)}}, \text{ a przeto } t = MO + RH = \frac{-Az+Bw}{\sqrt{(A^2+B^2)}},$$

$$u = \frac{-Aw-Bz}{\sqrt{(A^2+B^2)}}, \text{ skąd otrzymamy za pomocą elimi-}$$

$$\text{nacyi } z = \frac{-At-Bu}{\sqrt{(A^2+B^2)}}, w = \frac{Bt-Au}{\sqrt{(A^2+B^2)}}; \text{ aże zró-}$$

wnanie (A) daie nam

$$-At-Bu = Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + Iu^3 + i \text{ t. d.}$$

widzemy że z iest ilością daleko mnieyszą od
 w ; albowiem w iest wyrażone przez t , u ; z zaś
przez potęgi wyższe tychże odmiennych ilości: po-
trzeba nam więc pamiętać o tych wartościach z , w ,
odnosząc ich ubywanie do ostatnich granic.

Użyjmy teraz wszystkich uwąg wyłożonych na po-
czątku tego §. s których naprzód wypada; że uwa-
żając liniją krzywą podaną zamkniętą w zrównaniu
(A), iako mającą za granicę łuk innej linii krzywéy,
wszystkie potęgi znikną w (A) przed pierwszą i dru-
gą, zostawivszy

$$-At$$

$$-At - Bu = Ct^2 + Du + Eu^2 \quad (\Lambda)$$

poznamy nałamprzód naturę téj linii, a dopiero równać ją będziemy s kołem, abyśmy wszystkie linie krzywe przywiedli do łuków koła. Przeto odmienić nam potrzeba współ-ufzykowane zrównania (Λ)

$$\text{kładąc } t = \frac{-Az + Bu}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}, \quad u = \frac{-Aw - Bz}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}, \text{ przez co}$$

zrównanie (Λ) zamięni się na

$$z\sqrt{(A^2 + B^2)} = \frac{(A^2C + DAB + EB^2)}{A^2 + B^2} z^2 +$$

$$\frac{(A^2D - B^2D - 2ABC + 2ABE)}{A^2 + B^2} wz +$$

$$\frac{(CB^2 - ABD + A^2E)}{A^2 + B^2} w^2$$

widzieliśmy zaś, że z jest niezmiernie małym w porównaniu w , więc w granicy, z^2 , zw , znikną przy z , w^2 ; a zrównanie pozostałe będzie wyrażać Parabolę

$$w^2 = \frac{(A^2 + B^2)\sqrt{(A^2 + B^2)}z}{[CB^2 - ABD + A^2E]} \quad (L).$$

Linia więc podana zmniejsza się w małym łuczku s Parabolą, której miarą równania jest współ-czynnik z w zrównaniu (L) . Przechodząc na tym ostatnim wynalazku, moglibyśmy wszystkie linie krzywe uważać jako złożone z łuków Parabolicznych. Ale lubo Parabola jest linią najprościejszą 2go porządku co do zrównania, nie jest jednak taką co do ryfunku. Znajdźmy związek między linią równania w Paraboli, i między promieniem koła, dalekobymy szczęśliwiej równać mogli łuki jakichkolwiek linii krzywych s kołem, bobyśmy za jego pomocą przyszli do odryfowania łatwo jakiejkolwiek linii. Cała zaś ta sztuka zależy od poznania promienia koła odpowiadającego każdemu łukowi linii podanej. Weźmy więc zrównanie na koło, którego promień $= a$, to jest

$$H_5. \quad y^2 =$$

$y^2 = 2ax - x^2$, kładąc w nie naprzód p za x , q za y , otrzymamy $q^2 = 2ap - p^2$; powtóre kładąc $x = p + t$, $y = q + u$, wypadnie $q^2 + 2qu + u^2 = 2ap + 2at - p^2 - 2pt - t^2$, aże $q^2 - 2ap + p^2 = 0$ - zostało się

$$2qu + u^2 - 2at + 2pt + t^2 = 0.$$

znosząc współczynniki tego równania z (\wedge), znajdziemy $A = 2p - 2a$, $B = 2q$, $C = 1$, $D = 0$, $E = 1$, $A^2 + B^2 = 4(p^2 - 2pa + a^2 + q^2) = 4a^2$, gdyż $q^2 - 2pa + p^2 = 0$; $\sqrt{A^2 + B^2} = 2a$, $(A^2 + B^2)\sqrt{A^2 + B^2} = 8a^3$; $CB^2 - ABD + A^2E = 4(p^2 + q^2 - 2pa + a^2) = 4a^2$, a równanie (L) zamieni się na - - $w^2 = 2az$, które nas uczy, że linia równania w Paraboli mieszaiący się z linią krzywą podaną przy M , jest téj samej wielkości, której średnica koła mieszaiącego się z tąż linią krzywą, czyli

$$2a = \frac{(A^2 + B^2)^{\frac{3}{2}}}{(CB^2 - ABD + A^2E)}, a = \frac{(A^2 + B^2)^{\frac{3}{2}}}{2(CB^2 - ABD + A^2E)} \quad (R'')$$

równanie (R'') wyraża promień ściśnięcia, czyli promień koła mającego taką krzywiznę, jaką ma linia podana w łuczku małym przy M . Szukając takiego promienia na każdy łuk linii podanej, znajdziemy w każdym miejscu inną jego wartość, a przeto linią iakiegokolwiek porządku iako złożoną z łuków kół różnych. Promień ten odmięniać będzie swoje położenie tak, iż raz przypadać może wewnątrz, a drugi raz zewnątrz linii krzywej, to jest z drugiej strony punktu M n. p. MV : w pierwszym przypadku linia krzywa będzie wklęśłą do pionowej MQ ; w drugim zaś będzie wypukłą; co nam właśnie wytyka równanie (R'') przez znak pierwiastkowy, który w sobie zamyka, i przez który pokazuje dwie wartości na promień ściśnięcia: Iakże każdy z takich przypadków rozróżnić? Trudność tę objaśnia nam samo porównanie fig. 32. z fig. 30: kiedy bowiem pionowa MQ pada zewnątrz linii krzywej NM , zawsze $SL < SN$, kiedy zaś $SL > SN$ iak na fig. 30. linia krzywa NM jest wklęśłą do pionowej MQ ; w pier-

Promień koła
przystającego
do linii krzy-
wej.

Fig. 32. No. 2 do

Fig. 30.

w pierwszym razie LN jest odjemne, w drugim zaś dodatne, a przeto cała ta trudność ułatwi się wynalazłszy zrównanie warunkowe, na LN dodatne lub odjemne. Nazwiemy $LN=s$, ponieważ $SN=u$, a s poprzedzających przypuszczeń $SL=\frac{-At}{B}$, będzie na

fig. 30. $u=\frac{-At}{B}-s$, włożywszy tę wartość za u Fig. 30.

w zrównaniu (\wedge), otrzymamy

$$-B^3s+B^2Ct^2-ABDt^2-B^2Dt^2+A^2Et^2+2ABEt^2+B^2Es^2=0.$$

s jest ilością niezmiernie małą, która niknie przy zbliżaniu się linii krzywej do łuku koła, przeto opu- Rozerzanie
ściwszy terminy zawierające s^2 , ts , zostanie się położenia li-
nii krzywej
względem śy-
czney.

$$s=\frac{(A^2E-ABD+B^2C)t^2}{B^3} \quad (P'')$$

ilekolwiek więc wyraż $\frac{A^2E-ABD+B^2C}{B}$, będzie od-

jemny, odnoga linii krzywej będzie wypukłą do pionowej iak na fig. 32. No. 2d^o, będzie zaś odnoga Fig. 32. No. 2d^o.
wkłętą do pionowej MQ , ilekolwiek wyraż wspomniony będzie dodatny iak na fig. 30, czego łatwo Fig. 30.
nam zawsze doświadczyć na iakakolwiek linią krzywą, mając współ-czynniki A, B, C, D, E , znane z zrównania (\wedge).

Zrównanie (R'') może nam dać na promień ściśkania albo wartość skończoną, albo zero, albo nieskończenie wielką: każdemu s tych przypadków odpowiadają pewne odmiany w krzywiznie linii. Jeżeli promień ściśkania jest zawsze ilością skończoną, odnoga linii krzywej ciągnie się bez żadnej przerwy i zwrotu: ale jeżeli promień ściśkania wypadnie nieskończony, ponieważ łuk koła na takowy przypadek zamienia się na linią prostą, linią krzywą będzie miała odnogę złożoną z łuczku tak niezmiernie małej krzywizny, iż ten ledwo do linii prostej nie przystanie. Wyfzczególnimy dokładniej ten przypadek,

padek, który ilekolwiek razy ma mieć miejsce, zawsze $CB^2 - ABD + A^2E = 0$; warunek ten zmaże bez wątpienia niektóre terminy w równaniu (\wedge), tak dalece, że pozostała ich reszta nie nauczy nas o gatunku linii krzywej w tym miejscu przystającą do linii podanej: potrzeba więc przybrać więcej terminów z równania (\wedge), iako to $Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + lu^3 + i$ t.d.

$$i \text{ w nie kładąc } t = \frac{-Az+Bw}{\sqrt{(A^2+B^2)}}, u = \frac{-Aw-Bz}{\sqrt{(A^2+B^2)}},$$

odmieniemy równanie na inné wzoru

$$z\sqrt{(A^2+B^2)} = aw^2 + bw^3 + cw^4 + dw^5 + i \text{ t.d. } \dots (Q'')$$

gdzie wyższe potęgi z są odrzucone iako niknące. S tego równania $z\sqrt{(A^2+B^2)} = aw^2$ wyraża nam naturę łuku mieszającego się z linią podaną, promień zaś sciskania do tego łuku jest $= \frac{V(A^2+B^2)}{2a}$, poło-

żywszy $a=0$, ten promień stanie się nieskończony, czyli łuk mały zmieści się z linią prostą: w takowym razie chcąc poznać dalszy ciąg linii krzywej brack nam potrzeba z (Q'') następujący termin bw^3 skąd $z\sqrt{(A^2+B^2)} = bw^3$, wyraża krzywiznę łuku następującego. Aże z, w , będąc w potęgach nieparzystych, na z dodatnie wypada w dodatnie, w zaś odjemne, kiedy z jest odjemnem; idzie za tem, że linia krzywa musi mieć taki ryfunek iaki nam pokazuje fig. 33. gdzie $+MR$ odpowiada $+RS$, a na $-MR'$, $-R'S'$: przy punkcie więc M odwraca swoją odnogę i bierze postać wężykowatą: kształt takowy przy M nazywa się PRZEGIĘCIEM (*Inflexio*) albo punktem ZWROTU PRZECIWNIEGO (*Punctum flexus contrarii*), gdzie krzywizna jest nieskończenie małą, i prawie przystającą do linii prostej.

Jeżeli b byłoby $=0$, na ten czas wziąć należy następujący termin z (Q''), $z\sqrt{(A^2+B^2)} = cw^4$, w tem równaniu ponieważ w tak dodatnie iak odjemne czyni zawsze z dodatnem, linia krzywa w tym przypadku nie ma punktu zwrotu przeciwnego: jeżeli

$$c=0;$$

Podział linii krzywych na odnogi różnych porządków: i cechy każdej z osobna.

Fig. 33.

$t=0$; wypadła równanie $z\sqrt{A^2+B^2}=dw^5$, i linia krzywa ma przegięcie, czyli punkt zwrotu przeciwnego: zgoła ile razy z będzie dane przez funkcją w stopnia nieparzystego, zawsze linia krzywa ma punkt zwrotu przeciwnego, nie ma zaś nigdy takiego punktu, kiedy z będzie funkcją w stopnia parzystego. Wszystkie takowe odnogi uważane jakoby się składały z łuczków kół różnych, a dane przez zrównanie zamykające z w pierwszym stopniu nazywać będziemy ODNOGAMI PIERWSZEGO PORZĄDKU (Rami primi ordinis), na które równanie wzoru $z=xw^n$.

Może się atoli przytrafić że w równaniu (λ) $A=0$, $B=0$, i terminy $Ct^2+Dtu+Eu^2$ rozbiegając się na dwa mnożniki nierównie, pokażą punkt dwójsty, w którym się dwie odnogi przecinają; na ten czas szukać nam potrzeba promienia ściśnięcia na każdą z osobna odnogę: to jest przypuściwszy że dwa mnożniki $Ct^2+Dtu+Eu^2=0$, są $a't+b'u=0$, $c't+d'u=0$, położywszy na pierwszy $t=\frac{-a'z+b'w}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}}$, $u=\frac{-a'w-b'z}{\sqrt{(a'^2+b'^2)}}$, na drugi zaś mnożnik $t=\frac{-c'z+d'w}{\sqrt{(c'^2+d'^2)}}$,

$u=\frac{-c'w-d'z}{\sqrt{(c'^2+d'^2)}}$ w równanie (λ), przerobiemy je na każdy z osobna - $zw=\alpha w^3+\beta w^4+\gamma w^5+\epsilon w^6$ + i t. d. a gdyby punkt był trojsty na równanie wzoru $zw^2=\alpha w^4+\beta w^5+\gamma w^6$ + i t. d. każde z nich będzie wzoru

$$z=\alpha w^2+\beta w^3+\gamma w^4 + \text{i t. d.}$$

jeżeli α nie jest $=0$, promień szukany będzie

$$=\frac{1}{2\alpha}, \text{ a gdyby było } \alpha=0, \text{ na ten czas równanie}$$

na linia krzywą miejsczącą się s podaną, będzie $z=\beta w^3$ i t. d. wszystkie te odnogi będą 1go porządku

rzędu, i linią krzywą będzie miała punkt zwrotu przeciwnego, jeżeli wykładnik w będzie nieparzysty, ale jeżeli ten wykładnik będzie parzysty, żadnego takiego punktu nie będzie.

Inne zaś będą wypadki kiedy będąc $A=0$, $B=0$, $Ct^2 + Dtu + Eu^2 = (a't + b'u)^2$, to jest że będzie zamykała funkcyą tą, dwa mnożniki równe, i dwie odnogi linii krzywey będą się dotykać; włożywszy więc $t = \frac{-a'z + b'u}{\sqrt{(a'^2 + b'^2)}}$, $u = \frac{-a'u + b'z}{\sqrt{(a'^2 + b'^2)}}$ w zrównanie (λ) , zamieniemy je na inne wzoru

$$z^2 = \beta w^3 + A w^4 + \epsilon w^5 + \text{i t. d.} \quad (S'')$$

gdzie inne terminy zamykające z są opuszczone jako niknące. S tych zaś linią krzywą mieżającą się w małym łuczku z linią podaną wyrażać będzie zrównanie $z^2 = \beta w^3$, albo $z^2 = A w^4$, kiedy $\beta = 0$, albo $z^2 = \epsilon w^5$ kiedy $\beta = 0$, $A = 0$, i t. d. Wszystkie te zrównania wyrażają Odnogi 2go porządku, na które zrównanie ogólne jest $r^2 = A' w^n$, gdzie $n > 2$. Jeżeli takową odnoga będzie daną przez zrównanie $z^2 =$

βw^3 , gdzie $n=3$, $z = w\sqrt{\beta w} = w^2\sqrt{\frac{\beta}{w}}$, a przeto

$$w^2 = \frac{\sqrt{w}}{\sqrt{\beta}} z, \text{ promień zaś ściskania } = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{w}{\beta}}, \text{ który bę-}$$

dzie zero, jeżeli $w=0$, to jest krzywizna linii w tym punkcie jest nieskończenie wielką; aże w tę samą ma wartość, kiedy z jest dodatnem lub ujemnem, przeto linią krzywą nie ma punktu zwrotu przeciwnego, ale Konczystość (*Cuspis*) przy M (fig. 34.) gdzie koło zamieniło się w punkt, i odnogi linii krzywey MS, MS' stały się obydwie wypukłe do styczney ML , w obydwóch tych odnogach na z dodatne lub ujemne odpowiada $w = RS$ dodatne, albo $= R'S'$ także dodatne. Jeżeli za n brać będziemy liczby nieparzyste w zrównaniu $r^2 = A' w^n$, wszystkie odnogi 2go porządku

Fig. 34.

ku będą miały kończyłności przy M s tą różnicą, że iako na $n=3$ wypadł nam promień ściśnięcia nieskończenie mały, tak na $n=5$, $n=7$, $n=9$, i t. d. wypadnie ténże promień nieskończenie wielki, ponieważ zrównanie n.p. $z^2 = \varepsilon w^5$, daie $z = w^2 \sqrt{\varepsilon}$, pro-

mień ściśnięcia $= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon w}}$, gdzie uczyniwszy $w=0$,

promień tén będzie $= \frac{1}{0}$.

Należy nam tu jednak ostrzec, że w zrównaniu (S') wzięliśmy tylko same funkcyje w , opuściliśmy inne terminy zamykające z , jeżeli atoli wrócemy się do stanu zrównania (S'') kiedy w niém przynajmniej pierwsze potęgi z ocalaia; będzie:

$$z^2 = \alpha zw^2 + \beta w^3 + \gamma zw^3 + \delta w^4 + \text{it. d.}$$

gdzie lubo dla wyliczonych już przyczyn αzw^2 możemy opuścić dla βw^3 , tak iako γzw^3 dla δw^4 , iednak $\beta=0$, αzw^2 niezniknie przed δw^4 , i zrównanie się pozostanie $z^2 = \alpha zw^2 + \delta w^4$, które rozwiążawszy co do z , jeżeli w niém $\alpha \alpha < -4\delta$, punkt M , będzie punktem sprzężonym, jeżeli zaś $\alpha \alpha > -4\delta$, odnoga 2go porządku będzie się składać z dwóch odnóg porządku pierwszego, i linią krzywą będzie miała dwie odnogi dotykające się zewnątrz iak na fig. 35, albo dwie dotykające się wewnątrz iak na fig. 36.

Fig. 35, 36.

Gdyby punkt do którego szukamy koła przyśtaiaćego, był troistym, odnogi iemu odpowiadające mogą być trzy 1go porządku, albo iedna 1go, a druga 2go, albo nakoniec iedna 3go porządku, na którą wypadłoby zrównanie albo $z^3 = \alpha w^4$, albo $z^3 = \alpha w^5$, albo $z^3 = \alpha w^7$, albo ogólnie $z^3 = A' w^n$, gdzie $n > 3$, i toż n iest cale nierozdzielne przez 3; te odnogi będą miały punkt zwrotu przeciwnego, jeżeli n będzie liczbą nieparzystą; jeżeli zaś n będzie liczbą parzystą, taki punkt nie będzie się znajdował w linii krzywey. Aże w zrównaniu $z^3 = \alpha w^5 = \frac{\alpha w^6}{w}$ - - - $z =$

$z = w^2 \sqrt[3]{\frac{a}{w}}$, skąd wypadá promień ściśnięcia $= \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{w}{a}}$,

to jest $= 0$, kiedy $w = 0$; biorąc zaś wyższe potęgi od
stęy n.p. $z^3 = a w^7$.. $z = w^2 \sqrt[3]{a w}$, skąd promień

ściśnięcia wypadá $= \frac{1}{2 \sqrt[3]{a w}}$ przeto w odnogach 3go

porządku kiedy $n < 6$, promień koła przybliżającego
jest nieskończenie mały, jest zaś nieskończenie wielki
kiedy $n > 6$. Znajdziemy podobnie w odnogach 4go
porządku że w nich promień jest nieskończenie wiel-
ki, kiedy $n > 8$; jest zaś nieskończenie mały, kiedy
 $n < 8$. wyraziwszy takie odnogi zrównaniem $z^4 =$
 $A' w^n$, gdzie $n > 4$. a jeżeli n jest liczbą nieparzystą,
wszystkie te odnogi dają kończyłość, tak iak odno-
gi 2go porządku. Więc ogólnie mówiąc: odnogi po-
rządku m wyraziwszy zrównaniem $z^m = A' w^n$, gdzie
 $n > m$, jeżeli m będzie parzyste, n zaś nieparzyste
dadzą kończyłość, czyli PUNKT ODBICIA (*Punctum re-*
flexionis), któremu będzie odpowiadał promień ści-
śnięcia nieskończenie mały, jeżeli $n < 2m$, albo nie-
skończenie wielki kiedy $n > 2m$. A jeżeli w zrówna-
niu ogólnem $z^m = A' w^n$, m, n , będą obydwu niepá-
rzyste, na tén czas odnogi porządku m , będą miały
punkt zwrotu przeciwnego, któremu tak iak koń-
czyłości powinien odpowiadać promień ściśnięcia 0 ,
albo $\frac{1}{2}$. Mamy więc trzy odmiany w odnogach linii
krzywey, te bowiem odnogi iakiegokolwiek bądź
porządku albo będą nieprzerwanie ciągłe kiedy pro-
mień koła przybliżającego będzie miał wartość skoń-
czoną, albo mając wartość nieskończenie wielką lub
małą, kiedy zrównanie na łuki międzające się $z^m =$
 $A' w^n$ jest takie iż będąc $n > m$, m jest liczbą niepá-
rzystą, n zaś parzystą. Albo te odnogi będą zamy-
kać punkt odbicia czyli kończyłość, albo nakoniec
punkt zwrotu przeciwnego czyli przegięciá podług
chara.

charakterów dopiero od nas wyliczonych, dwa atoli te ostatnie przypadki to mają istotnego, że w obydwóch promień koła przystającego, czyli ściśnięcia musi być nieskończenie wielki albo nieskończenie mały.

Przykład. Niech będzie zrównanie na linii 3go porządku $x^3 + xy^2 - ay^2 = 0$, . . . (L) wynaleśdź liczbę odnog nieskończonych przez ledwo-nieftychną tę lini krzywę? powtóre: czy ma punkt dwójsty? w tym punkcie czy ma przegiętość czy kończytość? Co do pierwszego . . . $x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0$: ponieważ termin najwyższego wymiaru zamyka tylko jednego mnożnika rzetelnego x , a dwóch uroionych . . .

Cisło i jej własności.

$(x + y\sqrt{-1})(x - y\sqrt{-1})$, przeto podług §. 18. $a = 0$, $b = -1$, $y = -t$, $x = u$. włożywszy te wartości w zrównanie (L), zamieniam je na $u^3 + ut^2 - at^2 = 0$, uczyniwszy $t = \frac{1}{u}$, otrzymuję $u = a$, a przeto $(u - a)t^2 + a^3 = 0$, zrównanie na ledwo-nieftychną hyperboliczną, czyli $u - a = \frac{-a^3}{t^2}$; linia więc krzywa opisana

zrównaniem (L) należy do 3go rodzaju linii 3go porządku mających ledwo-nieftychną wzoru $u = \frac{A}{t^2}$, i taż

linia krzywa ma dwie odnogi nieskończone między sobą równe, ponieważ na t dodatnie lub odjemne, odpowiada ta sama wartość u .

Chcąc teraz wiedzieć czy ta linia krzywa ma przegięcie lub punkt zwrotu, przeciwnego, czynię naprzód $x = p$, $y = q$, zrównanie podane zamienia się na . . . $p^3 = aq^2 - pq^2$. . . (L'), powtóre kładę w (L) $x = p + t$, $y = q + u$, a odrzuciwszy terminy zamknięte w zrównaniu (L') wypada mi

$(3p^2 + q^2)t - (2aq - 2qp)u + 3pt^2 + 2qtu - au^2 + t^3 + tu^2 + pu^3 = 0$ (L').

znoszę to zrównanie z (λ) §. 23, i otrzymuję wartość współczynników . . . $A = 3p^2 + q^2$, $B = 2qp - 2aq$, $C = 3p$, $D = 2q$, $E = -a$, $F = 1$, $G = 0$, $H = 1$, $I = p$, kładę te wartości za A, B, C , i t. d. w zrównanie

(R'),

$\{R''\}$, i otrzymuję promień ściśnięcia,

$$q^3(pa+p^2+q^2+4a^2)^{\frac{1}{2}}$$

$6p(2pq-2aq)^2-4q(3p^2+q^2)(2pq-2aq)-2a(3p^2+q^2)^2$
 czynię mianownika tego ułamku zero, to jest $p=0$,
 $q=0$, przez co równanie (L'') zamieni się na
 $-t^3-tu^2+au^2=0 \dots (N)$, termin drugiego wymia-
 ru au^2 tego równania ma dwóch mnożników ró-
 wnych, to jest $(u\sqrt{a})^2$ skąd otrzymujemy $t=w$,
 $u=-z$, włożywszy te wartości za t, u , w (N) , za-
 mieniamy je na $-w^3-wz^2+az^2=0 \dots (N')$, gdzie
 podług wyłożonych przyczyn $-wz^2$ zniknie, zostawi-
 wszy $w^3=az^2$, czyli $w^2=z\sqrt{wa}$, promień koła
 przystającego $=\frac{1}{2}\sqrt{aw}$: więc linia krzywa opisana
 równaniem (L) , ma kończyłość w punkcie dwoi-
 stym, gdzie koło przystające zamienia się na punkt,
 bo promień jego jest nieskończenie mały. S tych
 właściwości łatwo nam jest widzieć, że ta linia krzywa
 ma ryfunek taki, jaki nam pokazuje fig. 37, gdzie
 od punktu odbicia M roschodzą się dwie odnogi nie-
 skończone MS, MR , do których NO jest ledwo-niefty-
 czną prostą; co się właśnie pokazuje z samego zró-

Fig. 37.

wniania (L) , gdzie $y^2=\frac{x^3}{a-x}$, $y=\pm x\sqrt{\frac{x}{a-x}}$;

$ML=a$; M będąc początkiem odcinków, jeżeli $a=x$,
 $y=\infty$; jeżeli $x=0$, $y=0$; na x odjemne wszystkie
 wartości y stają się urojone, i linia krzywa za punkt
 M nie przechodzi: linia ta zważana jest częściej od da-
 wnych Geometrów, nazwana jest *Cissois*.

Linie krzywe iakożkolwiek naturą między sobą
 różne potrafilimy między sobą równać i stółować
 za pomocą granic ilości wzrastających i ubywających.
 Związki różne ilości odmiennych w równaniu, wy-
 rządzając zbiór całe innych właściwości, oddzielały każdą
 linia krzywą od innych: tak dalece, że przedstawwszy
 na samém rostrzafaniu pierwiastków równania, po-
 znanie linii krzywych wyższych porządków nad dru-
 gi, zostałoby było zakryte przed rozumem naszym
 aż do

Krótki zbiór
 nauki całego
 rozdziału.

aż do większej doskonałości Algebry; powtóre wszystkie różnice linii krzywych tego samego porządku nie stosowane do ogólniejszego początku, włożyłyby były prawo na rozum nasz i pamięć, zatrzymywania szczególnych charakterów i własności każdej linii, aby ją rozemnać od innych: zrównania na koniec jednej linii krzywej brać mogące różne postaci bez odmienienia jej natury, wyciągałyby zawsze po nas tyle szczególnego rostrzafania do wydobyć własności w nich zawartych. Kiedy teorya granic skazując nam náyogólniejsze linii cechy, uwalnia nas od tych szczególnych i zawikłanych dostrzeżeń, i poddaie wspólne własności i podobieństwa jednych do drugich służące za grunt do podziału nowego linii w każdym porządku na swe rodzaje. Granice ilości odmiennych odcinawczy wszystkie szczególności każdej linii krzywej, odkryły nam przez dwojakięgo rodzaju styczność to, co może być wspólnego jednej linii z drugą, i to co le istotnie od siebie oddziela: a zamieniając jedne związki na drugie prostiejsze, w kombinacjach tych zamian teorya ta wytknęła nam náyodleglejsze cechy zrównań. Każde bowiem zrównanie zamienić się może na innych barzo wiele przez niszczenie niektórych w sobie terminów; w tych atoli zamianach zostanie coś wspólnego lub istotnie różniącego to zrównanie od innych w tym sposobie uważanych, co nam odkrywa piętno oddziału, lub podobieństwa tego zrównania do drugich, a przez to i linii krzywych w nich zawartych. Korzyść jeszcze náycelniejszą która nam s takich wypadła uwag, jest porównanie linii krzywych z innemi prostiejszemi. Oderwiemy na moment umysł od Geometrii, i wynieśmy do powłzeczniejszych obrazów: ten początek granic, a znając dziemy w nim całe nowe sposoby Analitycznego prawidła.

Uważając dwie rzeczy wszystkiemi własnościami od siebie różne, a nie mogące dla jakichkolwiek przy-

Wykład się
drugi pocza-
tek Anality-
czny, który
jest wypad-
kiem uwąg te-
razniejszego
rozdziału.

czyn dostrzec związku między niemi, gubię w umyśle wszystkie te różnice: a przez to zamieniam rzecz na inną całę różney natury, i całę do siebie niepodobną; to samo działanie wykonywam i w drugiey rzeczy: a tak obie przetworzywszy na nowe istoty, rozniam te że tak rzekę nowe stworzenia umysłu s sobą, umieszczając w iednę klasie te, w których coś spólnego upatrzyłem, a oddzielając od siebie te w których mi się pokazała różnica. Nowe te istoty są granicami rzeczy przetworzonych, do których one się zbliżają tracąc s swoich własności, ale których dotając nie mogą chyba odmieniwszy całkiem swoją naturę. Wracam się potem do pierwzych obrazów, i iezelim nic spólnego nie widział w tem czem są, nauczyłem się téy spólności w tem, na co się mogą zamienić. I ten to sposób myślenia jest iak widzemy najdelikatniejszą ucieczką porównywania, który iak iezeszliwie Geometrii posłużył, nawet w poznawaniu przypadków natury, świadkiem jest cała Fizyka matematyczna. Widzemy iuż, że pierwszy początek analityczny w całém świetle od nas w Algebrze wystawiony, zależy na upatrywaniu związku między rzeczami przez porównywanie tego, co jest rzeczom przy swej naturze zestawionym spólnego; drugi zaś na dostrzeganiu i porównywaniu tego, co im zostanie spólnego odmieniwszy ich naturę. Tamten jest sposobem Matematyki początkowey, ten zaś Matematyki wyżzey. Cały ciąg prawd terażniejszego rozdziału dał nam uczuć, iak jest wielką rozległość tego ostatniego sposobu, którego dokładniejszē wyłożenie i rozebranie składa część barzo obszerną Matematyki wyżzey nazwaną RA. HUNKIEM DYFFERENCYALNYM i INTEGRALNYM. Własności stycznych iako były dla nas pierwszym źródłem s którego ten sposób wypłynął, tak daty początek dopiero wzwiankowanemu rachunkowi.

Wszystkie własności linii krzywych zawiśe od stycznych i dostępne Algebrze zamknęliśmy w tym rozdziale:

dziale: zostaje nam jeszcze rostrząsać wszystkie przecięcia zachodzące w liniach krzywych iakiegokolwiek porządku, co będzie przedmiotem Rozdziału następującego.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

Rostrząsaia się wszystkie PRZECIECIA linii krzywych od prostych lub innych krzywych: które prowadzą nas do inného jeszcze sposobu wyrażania linii iakiegokolwiek porządku, i do poznania SKŁADNI zrównań.

§. XXIV.

Linia krzywą przeciętą bydz może od prostej tak, iż płaszczyzna między obwodem linii krzywej położoną rozdzieli się na części równe i podobne, i takowe przecięcie służy średnicom: albo też linia prosta prowadzona zewnątrz lub wewnątrz linii krzywej przecina ją tak, iż z tego przecięcia nic więcej nie wynika, prócz że linia prosta ma jeden lub kilka punktów spólnych z linia krzywą: i takowe przecięcie służyło nam do wyrażania linii krzywych przez związek linii przecinającej z inną linia prostą, któreśmy wspót-ufzykowanemi nazwali. Uwážaliśmy iuż w liniach 2go porządku oba te gatunki przecięcia, które nam teraz rostrząsać należy we wszystkich porządkach wyższych sposobem cale różnym. Tam bowiem zrównanie 2go stopnia prowadziło nas przez uwážę jego własności do własności cięciw lub średnic, tu zaś od własności nadanych średnicom lub iakimkolwiek liniom prostym przecinającym, przyiśdź nam potrzeba do zrównań ogólnych takowe własności wyrażających, a w tych dopiero dostrzegać któremu porządkowi linii te własności służą. Sposób takowy dociekania wypadá s sposobu twó-
żania

Własność średnic rościągona do linii krzywych iakiegokolwiek porządku.

Fig. 18.

żania linii krzywych; chcemy bowiem poznać ich własności, nie rozwieszając ich zrównań. Zaczniemy od średnic: ponieważ średnica dzielić powinna linią krzywą na części równe i podobne, liczba takowych części zawiśla od liczby średnic, i tak na fig. 18. jeżeli linią krzywą jedną ma tylko średnicę AB , połowa iey położoną nad AB , bydl powinna równa i podobna drugiej połowie leżący pod AB : mając zaś dwie średnice AB , CD przecinałce się pionowo w punkcie S' ; linią krzywą rościęta jest na 4 części P , Q , R , S : s których mogą bydl albo wszystkie między sobą podobne i równe, albo dwie którekolwiek. Zebyśmy każdą parę takowych części rozoznać mogli, nazywać będziemy części leżące z dwóch stron $S'C$, albo $S'D$, czyli P , R , lub S , Q ; częściami przyległemi, w których różnica zachodzi wyrażoną przez znak dodatny lub ujemny odcinków x ; części leżące z dwóch stron linii $S'B$, czyli P , Q , nazywać będziemy częściami przeciw-ległemi, których cechą są znaki dodatni i ujemne przystraw y , biorąc zawsze S' za początek odcinków; części nakoniec leżące między kątami wierzchołkowemi, iako to $CS'A$, $BS'D$, czyli R , Q , lub dwie inne P , S nazywać będziemy częściami na przeciwn przeciw-ległemi, w których znaki obydwóch współ-ufżykowanych zachodzą przeciwne.

Cechy na rozoznanie średnic w linii krzywej, wyrażone przez zrównania.

Kiedy linią krzywą ma części przyległe, albo części przeciw-ległe między sobą równe, chcąc każdą s takowych części rozdzielić na części znowu równe tak, aby każda s takowych mniejszych części była równą drugiej w stronie odpowiadający równy; takowe podzieliły albo niemoga bydl czynione w dwóch razem stronach przez jedną linią prostą, n.p. w stronach przeciw-ległych P , Q ; albo nawet mogąc takowe różne przedzielić czynić, iakby się zdawało najpodobniej w stronach przyległych P , R ; Q , S , linią prostą dzielącą takowe strony nie będzie koniecznie w samym środku przecięta od drugiej AB ; bo jeżeli n.p.

li n.p. strona P jest równa stronie R , i znowu strona Q równa stronie S , nie idzie zatem koniecznie, żeby strony $P+R$ były równe stronom $Q+S$; ale tylko wypada s tego koniecznie, że strony $P+Q$ = stronom $R+S$, i że linia CD jest prawdziwą średnicą linii krzywey; oddzieliwszy przeto strony równe R, P , od innych równych Q, S , przez linią AB ; ta linia nie przetnie koniecznie średnicy CD w swoim środku. Podobnie rozumując na strony przeciw-ległe P, Q ; R, S ; znaydziem że kiedy $P=Q$, i znowu $R=S$; nie idzie zatem że $P+Q=R+S$; ale tylko s tego wypada, że $P+R=Q+S$, a przeto że w tym razie AB jest średnicą linii krzywey; ale linia CD nie koniecznie przetnie AB w samym środku. Kiedy zaś linią krzywą ma części na przemian przeciw-ległe między sobą równe, to jest $P=S$; $R=Q$; wypada stąd koniecznie że nie tylko $P+R=Q+S$; ale i jeszcze że $P+Q=R+S$, więc część linii krzywey leżąca nad linią AB , jest równa i podobna części leżącej pod AB ; i znowu część leżąca z jedney strony CD jest równa i podobna części położonej z drugiej strony CD ; a stąd wypada że linia AB dzieląc na dwie połowy linią krzywą, i CD dzieląc ją także na dwie połowy, AB, CD przecinają się w samym środku S' ; linia przeto krzywą mając strony na przemian przeciw-ległe równe, ma razem środek S' w którym się iey średnice przecinają i dzielą na dwie części równe: linie zaś krzywe mające tylko strony przyległe, lub strony przeciw-ległe sobie równe, mają tylko średnicę CD w pierwszym; średnicę zaś AB w drugim przypadku. Zebyśmy więc mogli z zrównania rozoznać kiedy linia krzywa ma środek, a kiedy ma średnicę, potrzeba nam wyrazić znamiona takowych własności przez ogólne zrównania, a z nich dopiero będziemy w stanie sądzić o iestestwie środka lub średnicy linii krzywey.

Zeby w linii krzywey strona P , była równa i podobna stronie Q ; potrzeba żeby przystawy na stronie

P , były równe przystawom leżącym na stronie Q , to jest wzięwszy S' za początek odcinków, potrzeba aby w zrównaniu na linią krzywą nic się nie odmieniło, kładąc w niem $-y$ na miejsce $+y$; więc potrzeba żeby w tém zrównaniu linią krzywą była wyrażoną przez x , i przez same potęgi parzyste y , czyli aby to zrównanie powstało s funkcji x, y^2 ; zrównanie więc $Z=0$, na linią krzywą mającą strony przeciw-ległe równe i podobne, a przeto średnicę AB , powinno być wzoru.

$$0=a+bx+cy^2+dx^2+ex^4+fy^4+gy^6+\text{ i t. d.}$$

takimi są wszystkie linie 2go porządku, i s trzeciego *Ci/sois* uważana od nas pod §. 23.

Zeby linią krzywą miała stronę $P=S$ stronie R , potrzeba aby w iey zrównaniu nic się nie odmieniło przenosząc współ-ufzykowane s strony P na R , czyli kładąc $-x$ na miejsce $+x$; a przeto potrzeba aby w zrównaniu $Z=0$, Z było funkcją y i samych potęg parzystych x , czyli żeby było funkcją y, xx . Zaczem linią krzywą będzie miała strony przyległe równe i podobne, a przez to średnicę CD , jeżeli będzie wyrażoną przez zrównanie wzoru:

$$0=a+by+cx^2+dyx^2+ex^4+fy^2x^2+gx^6+\text{ i t. d.}$$

Strony na przemian przeciw-ległe będąc równe i podobne jako to $R=Q, P=S$, wyciągają, aby zrównanie zostało w niczem nieodmienne przenosząc współ-ufzykowane s strony R na stronę Q ; aże w stronie R znaki współ-ufzykowanych są $+y, -x$; w stronie zaś $Q, -y, +x$; więc w zrównaniu $Z=0$ nie powinno się nic odmienić, kładąc $-y$ za $+y$; $+x$ za $-x$, a przeto Z powinno być funkcją samych potęg parzystych x, y ; czyli Z powinno być funkcją x^2, y^2 , a przeto zrównanie wzoru:

$$0=a+bx^2+cy^2+dx^2y^2+ex^4+fy^4+gx^2y^4+\text{ i t. d. (A).}$$

gdyby jeszcze Z było funkcją samych potęg nieparzystych x, y ; odmieniwszy do teraźniejszego przypadku $+x$ na $-x, +y$ na $-y$ całe zrównanie byleby nie zamykało żadnego terminu statecznego, z $Z=0$

zamieni

zamieni się na $-Z=0$, co iak wiemy wszystko iedno znaczy; więc ieszcze kiedy Z będzie zamykało same potęgi lub mnogości nieparzyste, x , y , bez żadnego terminu statecznego, to iest kiedy będzie zrównanie wzoru

$$0 = ax + by + cz^3 + dx^2y + cxy^2 + fy^3 + gx^5 + hyx^4 + \text{i t. d.} \quad (A').$$

linią krzywą takowem zrównaniem opisaną ma strony na przemian przeciw-legte równe i podobne, a przeto środek S' . Pierwsze zrównanie (A) na te-
raznieyszą własność, zamykając potęgi parzyste y , pokazuje ieszcze strony przeciw-legte równe i średnicę AB w linii krzywej: to samo zamykając wszystkie potęgi parzyste x , wyraża strony przyległe P , R , równe, i średnicę CD ; więc zrównanie A wyraża wszystkie cztery strony równe i podobne w linii krzywej, na które ją rozdzielaia dwie średnice AB , CD , do siebie pionowe. Skąd się oczywiście wnosi, że same tylko linie krzywe porządków parzystych mogą mieć cztery odnogi równe i podobne, i dwie średnice pionowe przecinaiać się w środku S' . Zrównanie (A') wyraża także środek w liniach krzywych, który może się znajdować w porządku parzystym lub nieparzystym; ale nie wyraża średnic pionowych. Zatrzymamy się nad rozległym poznaniem własności w zrównaniu (A') zawartych, kiedy średnice przecinaiać się w środku są nachylone do siebie kątem ukośnym.

Ieżeli linie proste AB , CD na fig. 39 są średnicami linii krzywej; część leżąca nad CD iest równa i podobna części leżący pod CD , i znowu część leżąca pod AB iest równa i podobna części leżący nad AB , i oprócz tego strony na przemian przeciw-legte są także równe i podobne. Nazwiemy część leżącą nad AB , P ; część pod AB , Q ; część między $AS'C$, niech będzie R , część między $BS'D$, S ; ponieważ $P=Q$; $R=S$; $P-R=Q-S$, a przeto $P-2R=Q-2S$, wzięwszy więc kąt $CS'E=$ kątowi $AS'C$; EF będzie także średnicą przeciętą w S' na dwie części równe:

Is

aż

Fig. 39.

O średnicach
ukośnych i ich
liczbie,

aże iefzcze $P-3R=Q-3S$, - - $P-4R=Q-4S$ - - i
ogólnie $P-nR=Q-nS$, idzie zatem że prowadząc li-
nie proste przez środek S' tak, aby czyniły między sobą
kąty równe kątowi $AS'C$; trafiemy na linią AB , ieże-
li stółunek kąta $AS'C$ do kąta prostego iest wymiér-
ny; i wszystkie te linie będą średnicami linii krzy-
wéy: podług więc wielkości kąta $AS'C$ między dwo-
ma piérwzemi średnicami, linią krzywą mając stro-
ny na przemian przeciw-legte równe, mieć może
dwie, trzy, cztery, n średnic: to iest, biorąc za-
wsze ten kąt $AS'C$ iako mający stółunek wymiérny
do kąta prostego, im kąt ten iest większy, tém
mniejszyż liczba wypadnie średnic, im zaś kąt ten
iest mniejszy, więcej średnic ukośnych linią krzy-
wą zamyka: to iest że liczba średnic w linii krzy-
wéy iest w stółunku spacznym wielkości kąta mię-
dzy dwiema piérwzemi średnicami zawartego: ie-
żeli więc kąt $AS'C$ iest nieskończenie mały, czyli
kiedy linia CD iest równo-legła linii AB , linia krzy-
wą ma nieskończoną liczbę średnic między sobą ró-
wnó-odległych, a przeto przystawa przecina takową
linią krzywą w nieskończoney liczbie punktów, co
nie może służyć żadnym liniom Algebraicznym, ale
tylko liniom krzywym przestępnym. Zadna więc li-
nia krzywa Algebraiczna nie może mieć dwóch śrze-
dnic między sobą równo-ległych. Gdyby zaś stółu-
nek kąta $AS'C$ do kąta prostego był niewymiérny, li-
nia krzywa miałaby nieskończoną liczbę średnic
przecinających się w punkcie S' : co służy kołu iak
wiémý z Geom: począł:

Fig. 19.

To zaś iest o tych średnicach uwagi godnégo, że
ponieważ z obydwóch stron średnicy linii krzywą
mieć powinna równy kształt i ułożenie; ieżeli na fig:
39 nad CD linią krzywą takiego iest kształtu iak i
pod CD , i ieżeli pod CS' znajduje się średnica AB
mająca z obydwóch stron jednym kształtem ułożoną
linią krzywą; idzie zatem że przy EF taka iest po-
stać linii krzywéy iak przy AB , czyli że średnice na
przemian

przemián iakié są AS' , ES' ; potem CS' GS' są iednégo gatunku, i zrównanie na linią krzywą powinno bydź takie biorąc EF za oś, iakiém iest odnoſząc wſpół-uſzykowane do osi AB : i znowu to zrównanie bydź powinno takie do GH , iakiém było do osi CD . Właſność ta ſrzednic na przemián idących ſłużyć nam może za grunt dochodzenia liczby ſrzednic w liniach krzywych iakiégokolwiek porządku. Zaiſte, ieżeli AB , EF n.p. są ſrzednicami iednégo gatunku, naprzód zrównanie bydź powinno nieodmiennie wyrażając linią krzywą nad, i pod ſrzednicą AB ; powtóre to zrównanie ieſzcze powinno zoſtać to ſamo przenoſząc ie z osi AS' na oś ES' : które to przypadki nie mogą bydź znaczone tylko przez funkcją kąta branego naprzód z różnéj ſtrony téj ſamej osi AS' , a przeto dodatnie lub odjemnie: powtóre, przez funkcją kąta przenoſzonego z osi AS' na oś ES' .

Chcąc przeto wiedzieć kiedy linią krzywą má pewną liczbę ſrzednic, potrzeba nam na każdą liczbę znaleźć cechę wyrażoną przez zrównanie pewného wzoru: tén zaś wzór zoſtać powinien nienaruszony ſtoſując go do funkcji kątów dopiero opifańych. Weźmy ſobie na to linią SM z ſrzedka do obwodu linii krzywéj pociągnioną, przez którą znaczyć będziemy różné połoſzenie wſpół-uſzykowanych $S'P=x$, $PM=y$, względem ſrzednic iedného gatunku za pomocą kąta $PS'M=\phi$: linią $S'M=z=\sqrt{x^2+y^2}$. Przypuſćmy naprzód że linią krzywą má tylko dwie ſrzednice AB , GH : ponieważż ułoſzenie linii krzywéj takie bydź powinno nad AS' iak i pod AS' , i znowu to ułoſzenie zoſtać powinno takie przy $S'B$, iakié iest przy AB ; więc zrównanie na linią krzywą mającą dwie ſrzednice bydź powinno takie, aby w niém $S'M=z$ zoſtało nieodmiennie, biorąc kąt ϕ dodatny i odjemny, i oprócz tego kąt $MS'B=P-\phi$, (tu P wyraża pół-obwodu koła,) więc z bydź powinno funkcją taką, któraby była nieodmienną na kąty ϕ , $-\phi$,

Ic

 $P-\phi$;

$P - \phi$; wiemy z Rozd. 4. Algebry Części II. że dostawa jest ta sama na kąt wzięty dodatnie lub odjemnie, wstawia zaś na kąt dodatni, dodatnią; na odjemny staie się odjemną: ale dostawa pojedyncza na kąt $P - \phi = -\text{Dofst. } \phi$. Dostawa zaś na kąt $2(P - \phi) = \text{Dofst. } 2\phi$: aże znowu $\text{Dofst. } 2\phi = \text{Dofst. } -2\phi$, więc Dostawa 2ϕ jest funkcją taką, która na kąty $\phi, -\phi$; $P - \phi$; zostaje nieodmienną. Przeto żeby linia krzywa miała dwie średnice, powinno zrównanie $Z=0$, być takie, aby Z było funkcją z i $\text{Dofst. } 2\phi$: aże

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{Dofst. } \phi = \frac{x}{z}, \quad \text{Wst. } \phi = \frac{y}{z}, \quad \text{Dofst. } 2\phi = \frac{x^2 - y^2}{z^2} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \text{ przeto na dwie średnice w zrównaniu } Z=0 \text{ linią krzywą wyrażającym, } Z \text{ być powinno funkcją } x^2 - y^2, x^2 + y^2, \text{ czyli funkcją } x^2, y^2, \text{ iakośmy już znaleźli.}$$

Jeżeli linia krzywa ma trzy średnice AB, EF, IK ; ponieważ średnica IS' jest tego samego gatunku co i AS' , zrównanie linią tę krzywą wyrażające być powinno nieodmierne, biorąc wespół-ufzykowane z iedną i drugiey strony linii AS' i znowu przenosząc ię z średnicy AS' na średnicę IS' ; aże kąt który czynią między sobą te trzy średnice, jest $= \frac{1}{2}P = 60^\circ$.

kąt zaś $AS'I = 2.60^\circ = \frac{2}{3}P$; kąt $MS'I = \frac{2P}{3} - \phi$, więc w zrównaniu $Z=0$. wyrażającym linią krzywą s trzema średnicami, Z być powinno funkcją nieodmierne na kąty $+\phi, -\phi, \frac{2}{3}P - \phi$; co służy tylko Dostawie $3\phi = \text{Dofst. } -3\phi = \text{Dofst. } (2P - 3\phi)$: aże podług § 51. równań (*) w Algebrze, $\text{Dofst. } 3\phi = 2. \text{Dofst. } \phi \text{ Dofst. } 2\phi - \text{Dofst. } \phi = \frac{x^3 - 3y^2x}{z^3}$, więc Z powinno być funkcją $x^2 + y^2, x^3 - 3y^2x$, jeżeli zrównanie $Z=0$ ma wyrażać

wyrażać linią krzywą trzy średnice mającą. To samo rozumowanie ciągnąc dalej, znajdziemy; że w równaniu $Z=0$ na linią krzywą mającą cztery średnice, Z być powinno funkcją z czyli x^2+y^2 , i Dostawy, 4ϕ . i ogólnie: na linią krzywą mającą n średnic, Z być powinno funkcją x^2+y^2 , i Dost. $n\phi$, wiedząc z §. 54. Algebry, że

$$\text{Dost. } n\phi = x^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-4}y^4 - \text{i t. d.}$$

podobnym sposobem wynaleśdź byśmy mogli równania na linie krzywe mające części równe i podobne.

Inne jeszcze własności średnic dostrzeżone w Rozdziale II. a zresztne rościagnione do wyższych porządków linii, służyć by nam mogły do wynaydowania cech pokazujących średnice w iakichkolwiek liniach krzywych. Widzieliśmy n.p. w §. 8. że średnice przedzielaia cięciwy równo-ległe na dwie części równe, czyli ogólniey: że przystawa należącą do średnicy jest równa summie pierwiastków przez 2 rozdzieloney. Powtóre że mnogość dwóch przystaw do tego samego odcinku należących, jest do mnogości dwóch przecięć linii krzywey od osi, w stosunku nieodmiennym, Te dwa początki rościągając do wyższych porządków linii, wystawmy sobie równanie iakiegokolwiek stopnia, w którym y jest tylko wymiaru drugiego, wszystkie zaś potęgi x temu stopniowi należyte, to jest: $y^2 - Py + Q = 0$, gdzie P, Q , są funkcjami x ; linia takim równaniem opisaną dwa razy tylko przeciętą być może od przystawy PM, PN , na fig. 40: rozdzieliwszy każdą z cięciw równo-ległych MN na dwie części równe przy O, O', O'' , punkta te przedziału O, O', O'' , leżyć mogą na linii prostej lub krzywey: w pierwszym przypadku wypadnie średnicą na linią podaną takiego rodzaju iak na linie krzywe drugiego porządku: całe więc pytanie zawiło od wynalezienia-czyli punkta O, O', O'' należą

Inny sposób
wynaydowa-
nia średnic w
liniach krzy-
wych.

Fig. 40.

O" należą do linii prostej lub krzywej, o czém nas nauczyć powinien współ-czynnik 2go terminu P ; więc my bowiem że $MP - PN = P$, a przeto $-PO = \frac{P}{2}$; ie-

żeli to ostatnie zrównanie jest na linię prostą, linią krzywą iakiegokolwiek porządku opisaną zrównaniem $y^2 - Py + Q = 0$, będzie miała średnicę taką, iakąśmy w drugim porządku widzieli. Weźmy sobie n.p. zrównanie na linii 3go porządku §. IV uczyniwszy w niem $k=0$, i ułożywszy je potem co do y , będzie

$$y^2 + \frac{hx^2+ex+c}{ix+f}y + \frac{gx^3+dx^2+bx+a}{ix+f} = 0.$$

gdzie $P = -\frac{hx^2+ex+c}{ix+f}$, $Q = \frac{gx^3+dx^2+bx+a}{ix+f}$, na-

zwąwszy $PO = z$, zrównanie na średnicę będzie

$$z = \frac{hx^2+ex+c}{ix+f}; \text{ jeżeli licznik tego ułamku jest zu-}$$

pełnie rozdzielny przez mianownika $ix+f$, zrównanie to wyrażać będzie linią prostą, i linią 3go porządku będzie miała średnicę; ale kiedy hx^2+ex+c , będzie rozdzielne przez $ix+f$, uczyniwszy $ix+f=0$, wypada koniecznie $hx^2+ex+c=0$, czyli włożywszy

w to ostatnie zrównanie $x = -\frac{f}{i}$, wypadnie . . .

$hf^2 - ef + ci^2 = 0$ zrównanie warunkowe, któremu trzeba żeby się stało zadolyc, aby linią 3go porządku miała średnicę prostą; do tego zaś przydadź ieszcze należy $k=0$. Jeżeli zaś hx^2+ex+c , nie będzie rozdzielne zupełnie przez $ix+f$, punkta O, O', O'' będą leżące na linii krzywej 2go porządku opisaney zrównaniem $x(2iz - hx) + 2fz - ex - c = 0$; aże termin najwyższego wymiaru w tém zrównaniu, zamykają dwa mnożniki rzetelne nierówne; punkta O, O', O'' , i t. d. leżą na Hyperboli.

Ile razy więc w zrównaniu $y^2 - Py + Q = 0$, $P = a + bx$, linia

linią krzywą ma średnicę: takową średnica przedzielając wszystkie przystawy ma dwie części równe, czyni ieszcze P jako sumę wszystkich pierwiastków ilością stateczną: skąd wypadają dochodzenia linii krzywych, w którychby summa pierwiastków, lub funkcyi iaką takowej summy była ilością stateczną. Toż samo wynajdując na Q , iako na mnogość wszystkich pierwiastków, przyslibysmy do wielu prawd o liniach krzywych na iakiemkolwiek porządku.

§. XXV.

Powiedzieliśmy że wszystkie własności w liniach krzywych należą albo do stycznych, albo do średnic albo do cięciw: i ta prawda dostrzeżona w porządku drugim a upowfszechniona w Rozdziale poprzedzającym, i na początku teraźniejszego, przywiodła nas na porządki niższe linii do rozleglejszych prawd, które od stycznych i średnic zawiśły. Nie zostało nam tylko rostrząsnąć ogólniey przecięcia linii krzywych od cięciw, albo raczej własności linii prostych mających punkta swoje wspólne z linią krzywą. W czem rozróżnić nam potrzeba dwa przypadki. *Pierwszy*: kiedy linią prostą przecinając krzywą odmienną swoje położenia i znaczy punkta linii krzywey; iaką była zawsze przystawa odnośzona do pewnych odcinków: takową linią prostą nie jest wyrażoną osobnym zrównaniem, ale tylko jest funkcyą odmienną wchodzącą w zrównanie. *Drugi przypadek*: kiedy linią prostą przeciąwszy linią krzywą ma położenie nieodmienne, i jest wyrażoną właściwem zrównaniem: i na ten czas punkt przecięcia będąc wspólny dwóm liniom wyraża się przez dwa zrównania.

Zatrzymajmy się nad dwiema temi przypadkami porządnie. Co do pierwszego: każda odmiana linii prostej przecinającej, idąc za odmianą punktów linii krzywey służyć może do wyrażenia przez zrównanie natury tej ostatniej linii. Przystawy iakiśmy dotąd uważali odmienną tylko swoją wielkość zostawili między sobą równoległe. Wystawmy

Przypadki ieszcze zachodzące w przecięciach linii krzywych od prostych.

Sposób wyrażania linii krzywych przez zrównanie, kiedy kąt jest ilością, odmienną, sobie

Fig. 41.

sobie teraz inną odmianę na fig. 41. kiedy linia CM przecinaiać linią krzywą u M, N , odmienia nie tylko swoją wielkość, ale i położenie względem linii CP , całą takową odmianę zawiśła od odmiany kąta PCN , który swoim wzrostem lub ubywaniem oznaczają pierwiastki rzetelne lub uroione w zrównaniu, dając położenie linii CM takie, jakie jest potrzebne żeby linia krzywa była przeciętą albo chybiaoną od prostej: jeżeli więc przecięcia CM, CN ; bydz mogą tém, czém były przystawy równo-legte, te przecięcia będą całkiem zawiśte od kąta PCN , uczą nas, że drugą ilością odmienną bydz powinién kąt PCN . Owóż nowy sposób wyrażania linii krzywej przez zrównanie, w którym kąt, i linia pod tym kątem prowadzoná, są ilościami odmiennými. Trafiliśmy już na ten sposób szukając zrównania biegunowego w liniach 2go porządku pod § XII. i znowu w §. poprzedzającym wynayduiać liczbę średnic.

Zrównania na
linie krzywe
raz przecięte
od prostej.

Zrównanie któreby opisywało linią krzywą tym sposobem wypasdz powinno s funkcji ilości odmiennéj $z=CM$, i s funkcji kąta $p=PCN$. Chcąc poznać liczbę pierwiastków rzetelnych w zrównaniu, czyli liczbę przecięć linii krzywej od prostej, wie dzieć nam potrzeba iaká funkcyja kąta wyrażá dwá, trzy, cztery, n przecięć. Ale liczba przecięć iedna zależy może od wielorakich wartości CM , kiedy zdane będzie przez zrównanie złożone z wielu pierwiastków, czyli przez funkcyą wielo-kształtną z ; drugá liczba przecięć zawiśnąć może od wielorakich wartości na funkcyą kąta p : potrzeba nam wszystkie te szczególności iak náydokładniéj poznać. Funkcye kąta nie mogą bydz tylko Wstawy, Dostawy, albo Styczne, Dostyczne, Sieczne, Dołeczne, które są funkcyami Wstaw i Dostaw. Zeby więc iedna funkcyá kąta wyrażała wiele przecięć, potrzeba żeby iedna n.p. Wstawa miała wiele kątów do których náleży. Obrócaiać linią CN około punktu C trafiemy prawdą na wiele takich kątów przez dorzucanie powtarzane pół-

pół-obwodu koła P ; ale tu nie idzie o wieloraką wartość odpowiadającą różnemu położeniu i różnej wielkości linii CN , ale o wartość odpowiadającą jednemu tylko na każdy raz położeniu. W tym przypadku widzimy że jedna ta sama wstawka służy kątowi $PCN=p$, i kątowi $DCR=180^\circ+p$, którego wstawka i dostawa jest odmienną; wszystkie inne kąty mając te same wstawę i dostawę padną na te same punkta linii krzywej, które należą do kątów $p, 180^\circ+p$. Te jeszcze dwa kąty mogą wyrażać dwie odnogi różne należące do tej samej linii krzywej; albo mogą ryfować dwie linie krzywe, teyże samej natury i kształtu, z których jedna będzie położoną na stronie CP , druga na stronie CD . Pierwszy przypadek ma miejsce, kiedy na wstawy lub dostawy służące kątowi p , wypadną wartości na CM , różne od wartości odpowiadających kątowi $180^\circ+p$: drugi zaś przypadek, kiedy na obydwie te kąty otrzymamy te same wartości CM , z których jedne będą dodatnie, a drugie odjemne; co jeszcze zależy od różnego położenia punktu C jako początku odcinków. Jeżeli ten punkt będzie zewnętrzny linii krzywej iak na fig. 41. widzimy że to samo zrównanie wyrażać może linią krzywą leżącą na stronie CP , albo na stronie CD : jeżeli zaś ten punkt będzie leżał wewnątrz; funkcyje s strony CM , i s strony CR nie wypadną te same, chyba że linie RCM, PCD , są dwie średnice, z których każda dzieli linią krzywą na części równe, podobne, i iednako około siebie rozporządzone: i w których punkt C jest środkiem. Jeżeli zaś punkt C leżąc będzie na punkcie linii krzywej, to przecięcie przy C będąc wspólne wszystkim kątom nie należy do rachunku przecięć odpowiadających różnym pierwiastkom zrównania, co także trzymać należy o przecięciach należących do dwóch tych samych linii krzywych. Te uwagi dają nam poznać, że liczbę przecięć potrzeba nam wyciągać s funkcyi kilko-kształtnych z , do których taczyć powinniśmy uwagę kątów

K

tów

Fig. 41.

tów p , $180^\circ + p$: tak iako przecięcia linii krzywey od przytaw wyciągaliśmy s funkcji y , biorąc na każdy pierwiastek, x dodatnie i odjemne. Jeżeli linia krzywa raz tylko bydz może przeciętą od linii prostej, potrzeba náprzód, aby z było funkcją iedno-kształtną: powtóre żeby to z było wyrażone przez funkcją taką kąta, któraby dawszy iedno przecięcie na kąt p , iuż innego nie wydała na $180^\circ + p$; chyba żeby to drugie przecięcie nie różniło się od pierwszego tylko samym znakiem i wprowadziło ten sam znak w z . n.p. jeżeli $z = P$, gdzie P wyraża pewną funkcją kąta p ; kładąc za p , $180^\circ + p$, z stanie się $= Q$; jeżeli $Q = -P$, i z na $180^\circ + p$ iest odjemnem, będzie $-z = -P$, czyli $z = P$: takowá więc wartość żadnego nowego przecięcia nie wprowadzą. Zeby zaś P miało wspomnioną własność, potrzeba aby było funkcją nieparzystą wstawy p , albo dostawy p : niech będzie

$$CM = z, CP = x, PM = y, \text{ będzie } \frac{y}{z} = \text{Wst. } p, \frac{x}{z} =$$

Dost. p : jeżeli $z = P$, iest zrównaniem na linią krzywą raz tylko przeciętą od prostej; P bydz powinno funkcją

nieparzystą $\frac{y}{z}, \frac{x}{z}$, czyli funkcją nieparzystą x, y, z ,

nie mającą żadnego wymiaru. Do téj klasy należą linie krzywe zamknięte w zrównaniach.

$$z = \frac{ay}{z} + \frac{bx}{z} + \frac{cz}{x} + \frac{dz}{y}; \quad z = \frac{ay}{z} + \frac{bx}{z} + \frac{cz}{x} + \frac{dz}{y} + \frac{ey^3}{z^3} + \frac{fx^3}{z^3} + \frac{gz^3}{x^3} + \frac{hy^2x}{z^3} + \text{i t. d.}$$

$$\text{czyli } 1 = \frac{ay}{z^2} + \frac{bx}{z^2} + \frac{c}{x} + \frac{d}{y} + \text{i t. d.} \quad 1 = \frac{ay}{z^2} + \frac{bx}{z^2} + \frac{c}{x} + \frac{d}{y} + \frac{ey^3}{z^4} + \frac{fx^3}{z^4} + \frac{gz^2}{x^3} + \frac{hy^2x}{z^4} + \text{i t. d.}$$

wszystkie potęgi z będąc parzystymi w takowych zrównaniach, staną się funkcjami wyniernymi x, y , położy-

położywszy $z^2 = x^2 + y^2$, oprócz tego cały drugi człon tych ostatnich równań jest wymiaru -1 , i równa się jedności, czyli ogólnie mówiąc ilości statecznej; więc każde równanie, w którym funkcya x , y , wymiaru -1 , równa jest ilości statecznej, wyraża linią krzywą raz tylko przeciętą od linii prostej. Niech będzie R funkcją wymiaru n , S funkcją wymiaru $n+1$, a ilością stateczną; wszystkie linie krzywe raz przecięte od prostej zamknięte są w równaniu ogólnem $\frac{R}{S} = a$, aże $\frac{S}{R} = \frac{1}{a}$, gdzie $\frac{1}{a}$ jest ie-

szcze ilością stateczną, którą wyrazić możemy przez α , więc jeszcze równania w których funkcya x , y , wymiaru pierwszego jest równa ilości statecznej, opisują linią krzywą raz przeciętą od prostej. Wszędzie takowe linie krzywe wyrażają się równaniem ogólnem $\frac{S}{R} = \alpha$ - czyli $S = \alpha R$, czyli

$$\alpha x^{n+1} + b x^n y + c x^{n-1} y^2 + d x^{n-2} y^3 + e x^{n-3} y^4 + \text{i t. d.} \\ = \alpha (A x^n + B x^{n-1} y + C x^{n-2} y^2 + D x^{n-3} y^3 + \text{i t. d.}) \quad (M).$$

Do tego więc rodzaju należy náprzód linią prostą, na którą $n=0$: powtóre linie 2go porządku na które $n=1$: ale w tych liniach punkt C na fig. 41 leżyć musi na samej linii krzywej, a przeto w rachunek przecięcia nie wchodzi jako spólny wszystkim kątom. Potrzebie linie 3go porządku gdzie $n=2$: ale punkt C leżyć musi na punkcie dwoistym i t.d. Linie więc 3go porządku mające tylko w swém równaniu jeden pierwiastek rzetelny, terminy zaś najwyższego wymiaru w x , y ; oprócz tego linie 3go porządku dwa razy przecinane od linii prostej, byleby punkt C leżał na punkcie linii krzywej; linie jeszcze krzywe 3go porządku mające punkt dwoisty, byleby w tym punkcie znaydowało się C , uczynią zadofyć równaniu (M). Podobnym sposobem rozmować można o liniach porządków wyższych.

Wystawmy sobie teraz że linią CM na fig. 41 prze-

Zrównania na
linię krzywą
dwa razy prze-
ciętą od pro-
stej.

ciną we dwóch punktach linią krzywą, a przeto że
ta linia krzywa wyraża się zrównaniem

$$z^2 - Pz + Q = 0 \quad - \quad z = \frac{1}{2}P \pm \sqrt{\left(\frac{P^2 - 4Q}{4}\right)}, \text{ gdzie } P, Q, \text{ są}$$

funkcjami kąta p . Zeby wprowadzonemu warun-
kowi zadość się stało, potrzeba żeby każdy z dwóch
pierwiastków na z , iedno tylko przecięcie wydał, a
przeto trzeba żeby kątowi $180^\circ + p$ już żadna inżá
nie/odpowiadała wartość na z : czego nie można ina-
czej otrzymać tylko ieżeli P jest funkcją nieparzy-
stą, Q zaś funkcją parzystą wstawy lub dostawy ką-

ta p , czyli P funkcją nieparzystą $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$; Q zaś fun-
kcją parzystą tychże ilości. Aże podane zrównanie

na linią krzywą wyrazić się może $1 - \frac{P}{z} + \frac{Q}{z^2} = 0$;

niech będzie R funkcją wymiaru n , S funkcją wy-
miaru $n+1$, T funkcją wymiaru $n+2$; ponieważż $\frac{P}{z}$

jest wymiaru -1 , wyrazić ie możemy przez $\frac{S}{T}$, tak

dalece że $\frac{P}{z} = \frac{S}{T}$; $\frac{Q}{z^2}$ ponieważż jest wymiaru -2 ,

będzie $\frac{Q}{z^2} = \frac{R}{T}$, i zrównanie ogólne na linię krzywą

dwa razy przeciętą od prostej jest $-1 - \frac{S}{T} + \frac{R}{T} = 0$,

czyli $T - S + R = 0$. tu znowu należyć mogą linie
krzywe ze wszystkich porządków czyniąc $n=0$ na
drugi, $n=1$ na trzeci, $n=2$ na czwarty porządek
i t. d. i biorąc za T terminy wymiaru $n+2$ dodatnie,
za S terminy wymiaru $n+1$ odiemnie, za R terminy
wymiaru n znowu dodatnie podług zrównania $T - S + R = 0$, w porządku więc trzecim termin zawier-
ający

raiący ilości stateczne nie wniydzie, w porządku 4tym terminy wymiaru pierwszego, ani termin stateczny; w porządku 5tym terminy wymiaru 2go, 1go ani termin stateczny nie będą wchodzić w oznaczenie takowych linii krzywych: co podobnie łatwo jest ściągnąć do porządków wyższych. Kondycyi więc założonej uczynią zadofyc linie 2go porządku, wystawiwszy sobie jedno przecięcie w odległości nieskończonej, kiedy w Hyperboli linią prostą przecinająca stanie się ledwo-niestyczna, w Paraboli zaś osi równoległą. Linie z 3go porządku uczynią także zadofyc, położywszy punkt C na punkcie linii krzywej; z 4go porządku linie mające punkt dwójsty, w którym znajdować się będzie C: zgoła linie s porządku n będą mogły uczynić zadofyc zrównaniu $T-S+R=0$, jeżeli będą mieć punkt tyle-krotny, ile $n-2$ zamyka jedności, i jeżeli w takowym punkcie znajdować się będzie C. Gdybyśmy jeszcze mieli uwagę na pierwiastki urońone zrównań, znaleźlibyśmy jeszcze w wyższych porządkach wiele linii krzywych nie mających takiego punktu, iakięgo wyciągamy, a jednak zadofyc czyniących zrównaniu i warunkowi założonemu.

Nim postapiemy dalej rozwiążmy tu sobie następujące zadanie. Wynaleśdź zrównanie na wszystkie linie krzywe, które tak są przecięte we dwóch mietyfach M, N, od linii prostej, iż cięciwa MN, czyli różnica dwóch przecięć $CN-CM$, jest zawsze ilością stateczną. Ponieważ linie krzywe dwa razy przecięte od prostej, zawierają się wszystkie w zrównaniu $z^2-Pz+Q=0$, s którego potem to ogólne powstało $T-S+R=0$, jest więc $CM+CN=P$, $CM.CN=Q$, aże $[CN-CM]^2=(CN+CM)^2-4CM.CN=P^2-4Q$, podług kondycyi więc zadania jest $CN-CM=\sqrt{(P^2-4Q)}=a$, gdzie a wyraża ilość stateczną $P^2-4Q=a^2$ -- (α), chcąc tę kondycyę w zrównaniu (α) zawartą wprowadzić w $T-S+R=0$, przypomniemy sobie że

Linia krzywa
 Muszlowa.

Fig. 41.

K₃

$\frac{P}{2}$

$\frac{P}{z} = \frac{S}{T}, \frac{Q}{z^2} = \frac{R}{T}$, czyli $P = \frac{Sz}{T}, Q = \frac{Rz^2}{T}$, włożywszy te wartości za P, Q , w (α), wypadnie

$$\frac{S^2 z^2}{T^2} - \frac{4Rz^2}{T} = a^2, \text{ skąd } R = \frac{S^2}{4T} - \frac{a^2 T}{4z^2}$$

włożywszy znowu tę wartość na R w zrównanie

$$T - S + R = 0, \text{ odmienni się na } T - S + \frac{S^2}{4T} - \frac{a^2 T}{4z^2} = 0,$$

$$\text{czyli na } z^2(2T - S)^2 = a^2 T^2 \quad (\beta).$$

(β) jest zrównaniem na wszystkie linie krzywe tę własność mając, że $CN - CM = a$, i dwa razy tylko przecięte od prostej: ponieważ T jest wymiaru $n+2$, S wymiaru $n+1$; porządek czwarty jest najniższym porządkiem zawierającym linie ciągłe tą własnością znakomitę. W nim $n+1=0$, a przeto T jest wymiaru 1go, S ilością stałą: położmy $T=x, S=2b$, zrównanie (β), będzie 4go porządku:

$$a^2 x^2 = (x^2 + y^2)(2x - 2b)^2 \quad (A).$$

aż $\frac{x}{z} = \text{Dofst. } p, \frac{y}{z} = \text{Wfst. } p$, będzie $x = z \text{Dofst. } p, y = z \text{Wfst. } p$. Przez użycie tych wartości na x, y , (A) stanie się

$$a^2 z^2 \text{Dofst. } p^2 = z^2 (2z \text{Dofst. } p - 2b)^2, \text{ czyli}$$

$$z = \frac{b}{\text{Dofst. } p} \pm a \quad (A').$$

zrównanie (A') złożemy następującym sposobem; wzięwszy na fig. 42. linią przecinającą CN , której dwa punkta M, N , leżą na linii krzywej, od C prowadzę CB czyniąc z CN kąt $BCN = p$, potem prowadzę GH pionową do CB , i nazywam $CD = b$,

$DA = DB = a$, będzie $CL = \frac{b}{\text{Dofst. } p}$, a ponieważ $LM =$

$$LN = a, \text{ będzie } CM = \frac{b}{\text{Dofst. } p} - a, CN = \frac{b}{\text{Dofst. } p} + a,$$

$CN - CM = 2a$, czyli równe ilości statecznéj. Linia więc krzywą mającą dwie odnogi nieskończone XBZ , $X'AZ'$, i ledwo-niestyczną prostą GH , wyraża się zrównaniem (A') , albo (A) ; Dawni ieszcze Geometrowie uważali własności téj linii krzywéj, którą nazywali LINIĄ MUSZLOWĄ (*Conchois*) złożoną z dwóch części podobnych: odnogę XBZ nazywali MUSZLOWĄ ZEWNĘTRZNĄ (*Conchois exterior*), odnogę zaś $X'AZ'$ MUSZLOWĄ WEWNĘTRZNĄ (*Conchois interior*), iéy bowiem rylunek podobny jest do konchy. Chcąc od zrównania (A') przejść do (A) , biorę CB za oś, C za początek odcinków, od N spuszczam pionową NP , będzie $CP = x$, $PN = y$, $CD = b$, a z warunku pytania $NM = a$, trójkąty podobne CPN , NLF , daią mi następującą proporcją:

$$CP:CN::NF:LN \quad - \quad \text{czyli } x:\sqrt{x^2+y^2}::x-b:\frac{1}{2}a::2x-2b:a$$

$$ax = (2x-2b)\sqrt{x^2+y^2}, \text{ a zniósłszy znak pierwiastkowy, } a^2x^2 = (x^2+y^2)(2x-2b)^2; y^2 = \frac{a^2x^2}{(2x-2b)^2} - x^2,$$

kiedy $x=b$, $y=\frac{1}{2}a$, i linia krzywą zamienia się na ledwo-niestyczną.

Jeżeli linia krzywą ma być trzy razy przeciętą od prostej, powinna náprzód być wyrażoną zrównaniem $z^3 - P'z^2 + Q'z - R' = 0$, ponieważ na każdą wartość z , iedno tylko powinno wypadać przecięcie, a przeto kąt $180^\circ + p$ powinien nie wydać innego iak kąt p : dla ocalenia tego warunku, P' iako summa, R' iako mnogość wszystkich pierwiastków być powinny funkcjami nieparzystemi wstawy lub dostawy kąta p : Q' zaś iako mnogość z dwóch náraz pierwiastków, być powinno funkcją parzystą téjże wstawy lub dostawy kąta. Chcąc tę kondycję rościagnąć do iakichkolwiek porządków linii, zrównanie podane wystawiam sobie pod wzorem

$$1 - \frac{P'}{z} + \frac{Q'}{z^2} - \frac{R'}{z^3} = 0, \text{ gdzie } \frac{P'}{z} \text{ iest wymiaru } -1; \frac{Q'}{z^2}$$

K4

wymiaru

Zrównanie na trzy przecięcia linii krzywéj od prostej.

wymiaru -2 ; $\frac{R'}{z^3}$ wymiaru -3 ; niech teraz T będzie wymiaru $n+3$; S wymiaru $n+2$, R wymiaru $n+1$, na koniec Q wymiaru n ; będzie $\frac{P'}{z} = \frac{S}{T}$,

$\frac{Q'}{z^2} = \frac{R}{T}$, $\frac{R'}{z^3} = \frac{Q}{T}$, i równanie podane zamienia się na to ogólne:

$$1 - \frac{S}{T} + \frac{R}{T} - \frac{Q}{T} = 0, \text{ czyli } T - S + R - Q = 0.$$

linie więc s porządku 3go mogą uczynić zadosyć temu równaniu, wzięwszy punkt C zewnątrz linii krzywej: linie z 4go porządku także, byleby punkt C leżał na linii krzywej: linie z porządku 5go mające punkt dwójsty uczynią także zadosyć, byleby w tym dwójstym punkcie znajdowało się C , i ogólnie linie porządku n , mając punkt mnogości $n-3$, i w tym punkcie $n-3$ osadziwszy C . S tych uwag łatwo nam jest teraznieyszą teorią rościagnąć do linii przeciętych cztery, pięć, n razy od linii prostej. Gdybyśmy taki sposób obrali byli do wyrażania natury linii krzywej, widziemy oczywiście, że podział linii krzywych całe wypadają różny od tego, któryśmy przyjęli. Łatwo nam jest atoli linią iakąkolwiek krzywą wyrażoną przez współ-ufzykowane x, y , przywieść do wyrazu, gdzie funkcyą kąta wchodzi za ilość odmienną. Ten sposób uważania i wyrażania linii krzywych wiele nam położy w Mechanice i Astronomii.

§. XXVI.

Przecięcia linii krzywej od prostej mając dwa źródła.

Został nam jeszcze jeden przypadek do rostrzafania, kiedy linią prostą przecinając krzywą, jest wyrażona swym właściwem równaniem: na ten czas mamy dwa równania, jedno na linią prostą $ay + bx - c = 0$, drugie na linią krzywą $Ay^m + By^{m-1}x + Cy^{m-2}x^2 + Dy^{m-3}x^3 + \text{i t. d.} + A'y^{m-1} + B'y^{m-2}x + C'y^{m-3}x^2 + \text{i t. d.} + A''y^{m-2} + B''y^{m-3}x + \text{i t. d.}$

+

+ $\alpha y + \beta x + \gamma = 0$. gdzie m jest liczbą taką, do jakiego porządku należy linia krzywa. Chcąc w tym przypadku rostrząsać przecięcia linii krzywej od prostej, rzućmy okiem na fig. 43. Każda z tych dwóch linii ma swoje współ-ufzykowane, które odnosząc do jednej teyże samej osi AS ; widzemy, że w punkcie przecięcia przystawa linii prostej równą jest przystawie należący do linii krzywej, czyli że PM , $P'M'$, są wspólne obydwóm linióm: więc wyciągnąwszy wartość na y z równania na jedną z tych linii, i tę wartość włożywszy w równanie na drugą linią; otrzymamy równanie na samo x , które wyrażać będzie odcinki AP , AP' znowu wspólne i należące do przystaw wspólnych PM , $P'M'$. Liczba takowych odcinków zależy od liczby pierwiastków rzetelnych w równaniu na samo x , i ta liczba nauczy nas zaraz w wielu punktach linii krzywej jest przeciętą od prostej. Zaiſte równanie na linią prostą nie mogąc dać żadnego przecięcia niepodobnego, wyraża nam wszystkie przystawy rzetelne; te przystawy wprowadzając w równanie na linią krzywą nadaćmy pewne wartości y , które jeżeli są zgodne z związkiem ilości w równaniu zawartym, wydadz powinny x rzetelne; jeżeli zaś nie są, x wypadz powinno uroione, pokazując że linią krzywą nie ma żadnych współ-ufzykowanych wspólnych z linią prostą. Aże przez tę sztukę nic innego nie czyniemy; tylko za pomocą dwóch równań między dwiema ilościami odmiennemi x , y , wyrzucamy jedną, i przerabiamy dwa równania na jedno oznaczone, gdzie samo x , albo samo y jest funkcją ilości statecznych i znanych; więc wyrzucać ilość odmienną za pomocą dwóch równań, czyli przerabiać dwa równania nieoznaczone na jedno oznaczone, jest to szukać przecięć dwóch linii temi równaniami wyrażonych, odnosząc współ-ufzykowane obydwóch tych linii do jednej osi i do tegoż samego początku odcinków. Skąd widzemy znaczenie eliminacyi wyłożonej w §.

26. Algebrzy stółując ją do Geometrii: powtóre: że to

K₅

cośmy

Fig. 43.

rośmy dopiero mówili o linii prostej i krzywej, rościągą się do jakichkolwiek dwóch linii krzywych.

Przecięcie li-
nii krzywych
od innych
krzywych,

Mając równania na dwie linie krzywe $A=0$, $B=0$; i przerobiwszy je przez wyrzucenie y , na zrównanie oznaczone $C=0$, gdzie C jest funkcją x i ilości statecznych; to ostatnie równanie albo będzie zamykać wszystkie pierwiastki rzetelne, albo rzetelne zmieszane z uroionemi. Jeżeli $C=0$ zamyka wszystkie pierwiastki rzetelne; żeby każdy z nich wyrażał przecięcie linii krzywej od drugiej, potrzeba aby takiemu pierwiastkowi odpowiadała wartość na y rzetelna w $A=0$, i równa wartości rzetelnej drugiego równania $B=0$; ponieważ w tym przecięciu przystawę obydwóch linii krzywych są równe. Aże byż może, że wartość na x rzetelna wyciągnięta z $C=0$, uczyni y uroionem w $A=0$, albo w $B=0$; oprócz tego może się przytrafić, że x rzetelne wypadające z $C=0$, nie wyda wartości na y równych w obydwóch równaniach $A=0$, $B=0$; bo wiemy z teorii eliminacji §§. 9. 26. Algeb. że w ostatnie równanie $C=0$ wkłada się mnożnik zbytni nie należący ani do $A=0$, ani do $B=0$; więc pierwiastki nawet rzetelne zrównania $C=0$, nie zawsze wyrażają prawdziwe przecięcia dwóch linii krzywych. Zeby się o takowych przecięciach przekonać, potrzebaby każdej wartości na x , wydobytej z zrównania $C=0$ doświadczać, czyli ta nie uczyni y uroionem w $A=0$, albo w $B=0$; co tym jest trudniejsze do wykonania, im zrównania $A=0$, $B=0$; są wyższych stopni. Oprócz tego potrzeba nam być pewnemi, że każdy pierwiastek rzetelny $C=0$, daie równe wartości na y w obydwóch równaniach $A=0$, $B=0$; tym trudnościom zarządza się następującym sposobem: jeżeli wyrzucając y z $A=0$, $B=0$; trafiaamy w tym działaniu na zrównanie zamykające y w pierwszym stopniu wzoru $y=X$, gdzie X jest funkcją x i ilości statecznych; takowe zrównanie pokazuje, że wartości rzetelne x zrównania $C=0$ wyrażają prawdziwe

wdziwé przecięcia: n.p. gdybyśmy mieli dwa zrównania na linie krzywe $y^2 + Dyx + E = 0$, $y^2 + Fxy + G = 0$, wyrzucając y trafilibyśmy naprzód na zrównanie (a) $y = \frac{G-E}{x(D-F)}$, gdzie G, E, F

funkcyami x ; tę dopiero wartość na y włożywszy w jedno z zrównań podanych, otrzymalibyśmy nowe zrównanie na samo x . Zrównanie (a) wypadło z kombinacyi dwóch podanych zrównań $A=0, B=0$, więc musi mieć w sobie coś spólnego obydwóm podług §. 26. Algeb. Ta spólna własność jest w wartości na y , która nie może się na żadne x rzetelne stać uroioną; więc zrównanie (a) uczy nas, że wszystkie wartości na x rzetelne, jeżeli dają y rzetelne w zrównaniu $A=0$, dadzą je także w zrównaniu $B=0$, i że te wartości rzetelne y w obydwóch zrównaniach będą równe; ponieważ zrównanie (a) na każde x nie daie tylko jedną wartość y , spólną obydwóm zrównaniom $A=0, B=0$. Skąd się wnosi, że ile razy dwa zrównania podane na linie krzywe przyprowadzą nas do takiego, iakiem jest (a) w eliminacyi; wszystkie wartości rzetelne na x wyciągnięte z $C=0$, wyrażać będą przecięcia linii krzywych. Ale zrównanie (a) byłoby nie wypadło, gdyby podane $A=0, B=0$, zamykały same potęgi parzyste y , to jest: gdyby średnica linii krzywych była wzięta za oś; więc chcąc być pewnym że wszystkie wartości rzetelne na x zrównania $C=0$, wyrażają przecięcie, średnica nie powinna być osią. Oprócz tego nie zapominamy, że zrównanie (a) może być takie, iż przywiódłszy je do zero, będziemy je mogli rozebrać na inne prościęjsze, iako to $(y-ax)(b+cx)(d-ex)=0$, gdzie $y-ax=0$ da nam przecięcie; inne zaś $b+cx=0$ $d-ex=0$, mogą ich nie dać uczyniwszy y uroionem w $A=0$, albo w $B=0$; w takowym przypadku potrzeba nam wszystkie proste zrównania zamknięte

Ka

w (a)

w (a) poczynić zero, skądęgo wydobytą wartość na x , kładź w jedno z równań podanych $A=0$, $B=0$; jeżeli y na taką wartość wypadnie uroionem, pokaze nam przecięcie niepodobne. Skąd znowu rodzi się trudność naprzed w rozbięciu (a) na swoje mnożniki: powtóre w doświadczaniu każdego z tych mnożników czyli ma służy przecięcie podobne lub niepodobne? Trudność ta upadłaby, gdyby (a) nie mogło się na takie mnożniki rozbić, to jest, gdyby wyrażało jedną linią krzywą ciągłą przeciętą raz tylko od przystawy, nie zaś zbiór linii prostych lub krzywych prościęzłych. Więc żeby eliminacyą prowadzić nas mogła do prawdziwych przecięć linii krzywych, to jest żeby równanie oznaczone $C=0$, wypadające z dwóch nieoznaczonych $A=0$, $B=0$, przez swoje pierwiastki rzetelne wyrażało zawsze przystawy wspólne dwom liniom krzywym; potrzeba aby jedno z tych nieoznaczonych równań na linią krzywą ciągłą n.p. $A=0$, było wzoru $P+Qy=0$; gdzie P , Q , prócz ilości statecznych zamykają x w jakimkolwiek stopniu, a przeto równanie $P+Qy=0$ wyraża linią krzywą iakiegokolwiek porządku raz tylko przeciętą od przystawy; drugie zaś równanie $B=0$ zamykać może y w jakimkolwiek wymiarze, a przeto wyrażać linią krzywą ilekolwiek razy przeciętą od przystawy. Tym sposobem wydobytą wartość z $A=0$ na $y = \frac{-P}{Q}$, i włożoną w $B=0$, zrodzi równanie na samo x $C=0$; którego wszystkie pierwiastki rzetelne wyrażać będą prawdziwe przecięcia dwóch linii krzywych. Gdzie jeszcze mamy i tę korzyść, że równanie $y = \frac{-P}{Q}$ służy nam do upewnienia się, którą wartość równania na x , do której przystawy należy. Zaiście wystawmy sobie że $C=0$ ma dwa pierwiastki rzetelne oznaczające na fig. 45. dwa przecięcia M , N ; każdy z takowych pierwiastków

n.p.

Fig. 45.

n.p. $x=a$, nie wiemy jeszcze czyli jest AP , czyli AQ , a przeto czyli należy do przecięcia N , czyli do M : mając zaś równanie $y = \frac{-P}{Q}$, i w nie każdą s

takowych wartości na x kładąc, otrzymamy na y pewnej wielkości wartość; jeżeli to $y = +PM$, na $x=a$, należy do przecięcia M : jeżeli na x wypadną dwie wartości równe, z $C=0$; pokażą nam, że tam dwa punkta zeszły się razem, czyli że jest punkt

dwoisty, a równanie $y = \frac{-P}{Q}$ pokaże nam mieysce

tego dwoistego punktu.

Do wynalezienia przecięć linii krzywych iakiego-kolwiek porządku nie zostaje nam już tylko z dwóch równań podanych n.p. $P+Qy=0$, -- (A) $y^m+Ay^{m-1}+By^{m-2}+...+V=0$ -- (B). gdzie P, Q, A, B, C , i t.d. są funkcyami x , i ilości stałecznych; wyrzuciwszy y za pomocą prawideł §. 26. Algeb: wynaleśdź trzecie $x^n+A'x^{n-1}+B'x^{n-2}+C'x^{n-3}+...$ i t.d. $+V'=0$ -- (C) oznaczone; gdzie A', B', C', D' , i t. d. są funkcyami ilości znanych i stałecznych. To ostateńie równanie rozwiązawszy, wypadnie nam tyle odcinków $AP, AP', AP'',$ i t.d. ile x ma wartości rzetelnych: te pokażą liczbę punktów, w których linią krzywą -- $P+Qy=0$, przecina drugą $y^m+Ay^{m-1}+By^{m-2}+...$ i t.d. $+V=0$. Każdy więc pierwiastek rzetelny równania (C) będzie dany przez linią prostą: i jeżeli dwie linie krzywe nie mają średnicy wziętęy za oś, sto-pień równania (C) będzie miał za wykładnika liczbę powstającą z rozmnożenia wykładników najwyższych równania (A), i (B), ale jeszcze dodadź należy kondycyą, że (C) jest oswobodzone od mnożników obcych, któreby się mogły przymieszać w działaniu.

§. XXVII.

Widzieliśmy dopiero, że z dwóch równań niedznaczonych na linie krzywe wynaleśdź można trzecie

ozna-

Udycie prze- oznaczonę, którego pierwiastki rzetelne wyrażają od-
cięcie linii krzywych do po- cinki prowadzone do przecięć linii krzywych. Więc
znania składni każde równanie oznaczonę $ax^m + bx^{m-1} + dx^{m-2} +$
równa. $ex^{m-3} + \text{it.d.} \dots + k = 0 \dots (C)$. w którym $a, b, c,$

$d, \text{ i t.d.}$ są ilościami znanymi, uważać można iako powstaiające z dwóch nieoznaczonych przez wyrzucenie y , i iako mieć mogące pierwiastki rzetelne wyrażone przez linie proste. Wynaleśdź dwa nieoznaczone równania takie, z iakichby przez eliminacyą wypaśdź mogło (C), iest to wynaleśdź dwie linie proste lub krzywe przecinaiające się, mające oś spólną i początek odcinków, a oraz spólne odcinki należące do przecięć; a przeto iest to wynaleśdź pierwiastki równania (C) przez linie. Sposób ten rozwiązania równań za pomocą linii prostych lub krzywych nazywá się SKŁADNIĄ ZRÓWNAN (Constructio Aequationum). Złożyć bowiem równanie, znaczy w Geometrii odryłować linią prostą lub krzywą, w której związek współ-użykowanych rodzi równanie podane, i to znaczenie należy do równań nieoznaczonych: złożyć zaś równanie oznaczonę, iest to, odryłować dwie linie przecinaiające się tyle razy, i w taki sposób, aby odcinki do przecięć należące wyrażały wszystkie pierwiastki rzetelne równania podanego. Co nam nie będzie trudno wykonać i zrozumieć w przykładach. A naprzód każde równanie oznaczonę pierwszego stopnia $Ax - B = 0$, uważać się może, iakoby powstało z dwóch nieoznaczonych $ay = c(x+a)$ (1), $by = d(b-x) \dots (2)$, s których wyrzuciwszy y , wypadnie $x = \frac{(d-c)ab}{bc+da} \dots (3)$, które iest wzoru

$Ax - B = 0$: żeby więc znaleśdź wartość na x wyrażoną przez linie, potrzeba złożyć równania (1), (2), s których powstało (3). Aże równanie nieoznaczone (1), (2) każde z osobna rozebrać się może na cztery proporcjonalne terminy, które możemy dobrze wyrazić przez 4 linie proporcjonalne zawarte w dwóch trójkątach podobnych; przeto nazwáwšzy na fig. 44.

$$AB = a,$$

Fig. 44.

$AB=a$, $AD=c$, $AP=x$, $PM=y$, $CA=b$, $AE=d$, mamy náprzód $AB:AD::BP:PM$, czyli $a:c=a+x:y$ - - - $ay=c(a+x)$, więc zrównanie (1) jest na linię BS; powtóre, $CA:AE::CP:PM$ to jest $b:d=b-x:y$; - - - $by=d(b-x)$ zrównanie na linię CE: przeto pierwiastek zrównania (3) jest AP , należący do przecięcia spólnego M obydwóch linii prostych. Wszystkie zatem zrównania oznaczone pierwszego stopnia złożyć się mogą przez dwie linie proste.

Zrównanie najwyższe 2go stopnia $Ax^2+Bx+C=0$, ponieważ uważać się może iako wypadek z dwóch zrównań nieoznaczonych $ay=c(a+x)$, $y^2+a'xy+b'x^2+d'x+e'y+f=0$; s których drugie wyrażając linią krzywą drugiego porządku, uczy nas; że do złożenia zrównań oznaczonych 2go stopnia potrzeba użyć linii prostej, i linii którekolwiek 2go porządku. Iakóż linią 2go porządku mogąc być przeciętą we dwóch miejscach od linii prostej, okazać powinna w tych przecięciach dwa pierwiastki zrównania podanego $Ax^2+Bx+C=0$. Użyjmy do tego koła iako linii krzywej najłatwiejszej do rysunku, na którą zrównanie $d^2=(x-f)^2+(y-g)^2$; z dwóch tych zrównań na linię prostą i na koło wyrzuciwszy y , wypadnie zrównanie oznaczone:

$$(a^2+c^2)x^2+(2ca-2fa^2-2ag)x+a^2f^2-2ca^2g+a^2g^2+a^2c^2=0 \quad (C').$$

porównawszy to zrównanie s podaném co do współczynników A, B, C , i wprowadziwszy ielsze kondyce na oznaczenie innych ilości znanych w zrównaniach na linię krzywą i na koło, czyli raczej na wyrażenie a, c, f, g, d , przez A, B, C ; przyjdziemy do naznaczenia dwóch najwyższych zrównań na linię prostą i na koło, które uważać możemy iako mogące wydatk s siebie każde iakiekolwiek zrównanie 2go stopnia oznaczone $Ax^2+Bx+C=0$: nie zostaje nam więc tylko złożyć dwa zrównania

$$ay=c(a+x), \quad (A) \quad d^2=(x-f)^2+(y-g)^2 \quad (B)$$

tego dokażemy na figurze 45. nazwawszy $AR=a$, Fig. 45.

$$AB=c,$$

$AB=c$, $AD=f$, $CD=g$, $CM=d$, $AP=x$, $PM=y$,
 $LM=y-g$, $LC=x-f$, mamy náprzód $AR:AB::RP:PM$
 $a:c=a+x:y$, - $ay=c(a+x)$ - $CM^2=LC^2+LM^2$ - -
 $d^2=(x-f)^2+(y-g)^2$; zrównanie więc (β) iest na
koło promienia $CM=d$, zrównanie zaś (α) na linią
prostą RM przecinaiącą koło w dwóch mieyfcach N ,
 M , przeto AQ , AP , są prawdziwemi pierwiastkami
zrównania (C'). Podobnym sposobem złożyćby mo-
żná zrównanie 3go stopnia za pomocą linii prostej
z linią krzywą 3go porządku, którą prosta w trzech
punktach przecina: zrównanie 4go stopnia za po-
mocą dwóch linii 2go porządku iakie są náypościę-
fzse koło i Parabola, które się w czterech punktach
mogą przecinać: zgoła za pomocą dwóch linii krzy-
wych porządków, m, n , można złożyć zrównanie sto-
pnia mn .

Sposób takowy rozwiązywania zrównań za pomo-
cą linii krzywych, użyty od Des-Carta był ledwo nie
powołecznym, póki Geometrowie nie rozszerzyli gra-
nic Algebry i nie wprowadzili użycia Tablic Trygo-
nometrycznych. Za pomocą niego Des-Cartes ro-
związał zaraz wielkie owo w starożytności zadanie
o dwóch średnich proporcjonalnych liniach: i in-
nych wiele w swojej Geometrii o naturze linii krzy-
wych. Dawni Geometrowie nie mieli innego spo-
sobu uważania linii krzywych tylko przez takowe
przecięcia, które w niedostatku rachunku Algebrai-
cznego wyrażali przez same proporcye barzo zawi-
kłane; a chcąc przeniknąć w zawiakléjsze linii krzy-
wych własności, powynaydowali do tego linie krzy-
we wyższych porządków: tak Nicomedes wynalazł
linią Muszlową §. 25: Diokles, Cissoide §. 23. iako
widzieć można Pappum. Colle. Math. Lib. III. Des-
Cartes wynalazłszy sposób wyrażania linii krzywych
przez rachunek, wszystkie te dawnych zadania barzo
szczęśliwie rozwiązał. Poszedł za nim Newton w
swojej Arytmetyce powszechnéj, i wiele składni
zró-

zrównań w Des-Carcie uprościć, innych wiele przydał. Nie można nie wyznać że sposób rozwiązywania zrównań przez linie krzywe jest barzo dowcipny, i wprawiający w rozumowanie; ale do użycia cale trudny. Wyciąga bowiem prawdziwie geometrycznego rysunku linii krzywych, w którym chybiwszy, błędzemy wiele w wartościach samych pierwiastków. Rysować zaś linie krzywe wyższych stopniów porządków geometrycznie przez punkta, jest rzeczą niezmiernie znużającą i zawikłaną, iako każdy z pierwszej uwagi może się przekonać. Dla tej ci to przyczyny składnia zrównań przez linie krzywe jest cale zaniedbana w dzisiejszym Matematyki stanie, którąśmy tu krotko wyłożyli, aby jeszcze zostawić ślad pierwszego Geometrii stanu w starożytności, i za czasów Des-Carta. Ktoby jednak dokładniejszy chciał w tem wiadomości, odśledzić go do dzieł Des-CARTE: Marquis de l' HOPITAL: *Traité Analytique des Sections Coniques-Livre ix, x.*

ROZDZIAŁ PIĄTY.

Zrównania między TRZEMA ODMIENNEMI ILOŚCIAMI tłómaczą się przez POWIERZCHNIE CIAŁ, i przez linie proste lub krzywe na powierzchniach leżące: podaje się sposób wyrażania różnych powierzchni krzywych, i linii na wielu płaszczyznach zstających.

§. XXVIII.

Wszystkie własności linii krzywych, które nas dotąd zaprzętały, wydobyte są z uwagi nad zrównaniami nieoznaczonemi między dwiema odmiennymi ilościami; skąd nam jest łatwo uczuć, jak teorema takowych zrównań jest rozległa i obszerna, gdzie

Zrównania nie oznaczone między trzema odmiennymi ilościami tłómaczą się na linie

rozum ludzki zostawił najszcześliwszą pamiątki swojej dzielnosci, i gdzie zawsze niewyczerpane źródło nowych prawd znajduje. Pamiętajmy tylko, żeśmy dopiero jeden rodzaj równań nieoznaczonych potrafili przetłumaczyć na linie, to jest kiedy zrównanie dwie tylko odmienne ilości zamyka. Wszakże jednak zrównanie Algebraiczne zawierać może n ilości odmiennych, z których chcąc na jedną mieć wartość oznaczoną i pewną, potrzeba nam wprowadzić $n-1$ warunków dla nadania wartości tyluż niewiadomym: Coż więc znaczyć będą zrównania trzy odmienne ilości zawierające następując zaraz po tych, z których Teorya linii krzywych wypadła? Wystawmy sobie z nich jedno najprościejse $Ax+By+Cz+D=0$: w niem każda ilość odmienna jest funkcją dwóch innych, więc naprzód chcąc takowe zrównanie przez linie wytłumaczyć, potrzeba nam trzech współ-użytkowanych: każdy z tych współ-użytkowanych oddzielić potrzeba dwie strony, jedną na wartości dodatnie, na wartości odjemne drugą; a przeto całe miejsce na któreby leżała linia takowem zrównaniem opisana, rościć na sześć części od siebie różnych i oddzielnych. Tego dokazać nie potrafimy na jednej płaszczyźnie, bo tej wszystkie wymiary dwie współ-użytkowane swem położeniem zabraly: odcinki bowiem x zabraly całą szerokość; przykławy y całą długość płaszczyzny na której linia krzywa leżała: więc trzecia ilość odmienna z mieć powinna wymiar trzeci, czyli głębokość; a zatem ogólnie mówiąc: zrównanie nieoznaczone między trzema odmiennemi, ilościami nie może wyrażać tylko albo płaszczyznę odwołaną do drugiej płaszczyzny, albo powierzchnię krzywą ciała, albo co na jedno wyńdzie, linia krzywą leżącą na różnych płaszczyznach, do której oznaczenia potrzebuemy koniecznie dwóch płaszczyzn na wystawienie trzech współ-użytkowanych x, y, z : i z tej to podobno przyczyny takowe linie krzywe uważane od W. Geometry

ometry Clairaut (a) nazwane były DWOISTEY KRZYWIZNY (*Curvae duplicis Curvaturae*). Wystawmy sobie (fig. 46.) na płaszczyźnie gruntu, którą zawsze będzie płaszczyzna papieru, dwie linie nieoznaczonej wielkości do siebie pionowe, RS na odcinki, CD na rachowanie przystaw y ; powtóre trzecią linią GH pionową do płaszczyzny papieru, i przechodzącą przez punkt A wzięty za początek odcinków: ta linia służyć będzie do znaczenia przystaw z , które nazywać będziemy Przystawami wysokości: punkta więc linii krzywej na różnych płaszczyznach, leżących, czyli powierzchni ciał proste lub krzywe odnosić zawsze będziemy do płaszczyzny gruntu za pomocą trzech współ-ufzykowanych AP, MP, MZ, (fig. 47), z których każdą będzie równo-ległą swęj linii głównej na fig. 46; takowe linie główne RS, CD, GH, nazywają się OSIAMI (*Axes*). A iako strona AS będzie miejscem odcinków dodatnych, strona AR odciemnych; powtóre, strona AC miejscem przystaw dodatnych, AH przystaw odciemnych; tak strona AG nad płaszczyznę gruntu, będzie wyrażać przystawy wysokości dodatne, strona zaś AH też przystawy odcienne. Zebyśmy się łatwiej znaleźdź mogli w takowych odmianach położenia, wygodniey nam iefzcze będzie wystawić sobie trzy płaszczyzny do siebie pionowe, przecinające się w liniach głównych: to iest płaszczyznę gruntu; powtóre płaszczyznę przecinającą grunt w linii RS; na koniec płaszczyznę przecinającą tenże grunt w linii CD: obie te ostatnie płaszczyzny przecinać się będą w linii GH, a przeto będą do siebie i do gruntu pionowe. Trzy takowe płaszczyzny przechodzące przez punkt A, a rościągione do odległości nieoznaczonej, rozetną całą pełność miejsca na ośm przedziałów odpowiadających tyłuż położeniom współ-ufzykowanych; pierwszy przedział CGS służy wszystkim współ-ufzykowanym dodatnym; to iest: na $+x$, $+y$, $+z$; drugi przedział

Fig. 46.

L₂

CGR

(a) Traité des Courbes à double Courbure.

CGR służy na $-x, +y, +z$: trzeci przedział DGS jest na $+x, -y, +z$: czwarty przedział RGD jest na $-x, -y, +z$: piąty przedział SHC na $+x, +y, -z$: szósty przedział CHR na $-x, +y, -z$: siódmy przedział SHD na $+x, -y, -z$: ósmy przedział KHD na $-x, -y, -z$: z tych przedziałów jedne zamykają dwie współ-uszykowane z temiż samemi znakami, drugie jednę tylko współ-uszykowaną spólną, co do znaku: trzecie nakoniec wszystkie trzy współ-uszykowane co do znaków różne. A mając równanie na jakąkolwiek powierzchnią do trzech takowych płaszczyzn odnośzoną, łatwo nam jest przez to samo rozumowanie, któregośmy w §. 24 użyli, rozsądzić czyli które przedziały są między sobą równe i podobne: i tak n.p. jeżeli równanie zawierać będzie same potęgi parzyste z , powierzchnia leżąca nad płaszczyzną gruntową RCGS, będzie równa i podobna powierzchni pod tym gruntem położonej; i płaszczyzną gruntową będzie tem, czém były średnice w liniach krzywych; czyli będzie Płaszczyzną Śródkową (*Planum diametrales*): jeżeli zaś w równaniu na powierzchnię, x albo y będą się znajdować w samych wymiarach parzystych; w pierwszym razie płaszczyzna CGDH, w drugim zaś przypadku płaszczyzna SGRH będzie płaszczyzną śródkową.

Wyrazić linią jakąkolwiek leżącą na powierzchni ciała, przez równanie Algebraiczne; jest to ogarnąć wszystkie odmiany punktu tę linią opisującego: takowe odmiany względem płaszczyzny gruntowej pokazać nam przytawy wysokości z ; odmiany względem płaszczyzny SGRH pokazać nam wartości y ; odmiany nakoniec względem płaszczyzny CGDH odkryć nam odcinki x : skąd nam łatwo poznać, że odmiany jednéj współ-uszykowanej są zawisłe od drugich; a przeto że w równaniu na powierzchnię, każda ilość odmienna jest funkcją dwóch innych. Tu już łatwo poymiemy, że jeżeli powierzchnia ciała iakięgo jest opisana obwodem linii ciągłej-prostej lub

lub krzywey; cała ięć rozległość zawartą będzie w jednem zrównaniu, i będzie POWIERZCHNIĄ CIĄGLĄ (*Superficies continua*): jeżeli zaś opisaną jest tak, iż każda ięć część wypadła z obrotu innego gatunku linii, będzie także każdą takową część należała do innego zrównania, skąd powstaie POWIERZCHNIA NIEFOREMNA (*Superficies discontinua*), która do terazniejszych uwag nie będzie należyć. W zrównaniu na powierzchni ciągłej, z bydź może funkcją jednokształtną y, x ; a przeto na każdą wartość x, y , jedna tylko będzie odpowiadać przystawa wysokości, i takowe powierzchnie będziemy znowu nazywać PIERWSZEGO PORZĄDKU (*Superficies primi ordinis*): jeżeli zaś będzie funkcją dwókształtną x, y ; na każdą wartość x, y , dwie będą odpowiadać przystawy wysokości, i takowe powierzchnie będą DRUGIEGO PORZĄDKU (*Superficies secundi ordinis*), co ięćcie rościągawszy do wyższych wymiarów z , wynaydziemy dalszy podział powierzchni tak, iak na linie krzywe, gdzie należy nam ostrzec że wymiary ilości odmiennych nie są tak bezpieczną cechą do rozeznawania powierzchni, iak do linii krzywych: czego będziemy mieć przykład na powierzchni walca i ostrokrağa.

S tych pierwszych obrazów, któreśmy sobie o zrównaniach nieoznaczonych między trzema ilościami odmiennymi wystawili, domyslemy się łatwo, iż nam wypadają dwoiakiego rodzaju dociekania: to jest sposób wyrażenia zrównaniem powierzchni iakiegokolwiek ciała: i sposób wyrażenia linii na powierzchni ciała leżący: przypatrzmy się iak iedno s tych zagadnień jest od drugiego zawisłe.

Poznanie powierzchni iakiego ciała nabywają się przez poznanie wielu bardzo punktów na tę powierzchnię leżących, a przeto przez znalezienie prawa, podług którego te punkta się odmieniają. Do poznania wielu na rąz takowych punktów jest iedyny sposób poznać linie różne na takowej powierzchni

L3.

leżące,

leżące; te linie uważać się mogą iako ryfy zosławione od płaszczyzn przecinających ciało; a przeto poznanie powierzchni, zawisło od poznania linii na niej zosławiających; poznanie zaś takowych linii, nabywa się przez uwagę różnych przecięć takowej powierzchni od płaszczyzn. Weźmy sobie za przykład kulę, przecięwszy ją w iakiemkolwiek miejscu płaszczyzną, linia krzywa tém przecięciem na powierzchni odryta będzie koło, więc na fig. 47. punkt Z będzie leżał zawsze na kole; niech będzie $AP=x$, $PM=y$, $MZ=z$, przez punkt Z i przez środek kuli, czyli przez punkta Z , A , P , przecięwszy kulę, mamy naprzód $AM^2=x^2+y^2$; $AZ^2=AM^2+MZ^2=x^2+y^2+z^2$; aże AZ jest promień kuli; więc $a^2=x^2+y^2+z^2$ jest zrównaniem na kulę. Chcąc teraz od zrównania na kulę przyiść do poznania linii wypadającej s przecięcia kuli przez płaszczyznę gruntową; ta kondycja uczy nas, że $z=0$, a przeto zrównanie na linię szukaną jest $a^2=x^2+y^2$, jeżeli uczynię w zrównaniu na kulę $x=0$, otrzymam $a^2=y^2+z^2$ na linię s przecięcia kuli płaszczyzną $SGRH$; jeżeli zaś $y=0$, wypadnie mi $a^2=x^2+z^2$, zrównanie na linię, którą płaszczyzna $CGHD$ swém przecięciem zosławia.

Fig. 47.

Fig. 46.

Powierzchnie więc ciał uważać będziemy przez różne przecięcia tychże ciał od płaszczyzn, i przez linie takowém przecięciem zrodzone. Ponieważ zaś przytrafić się może, że linia krzywa na powierzchni zosławiając, leży na wielu płaszczyznach, i wypaść nie może s przecięcia ciała jedną płaszczyzną; ale tylko s przecięcia powierzchni przez drugą powierzchnią; przeto rozdzielęmy uwagę naszą na dwa przypadki: w pierwszym poznamy linie na powierzchniach ciał zosławiające, które wypaść mogą s przecięcia ciała od płaszczyzny; powtóre uważać będziemy linie krzywe zosławiające na powierzchni, ale razem znajdujące się na wielu płaszczyznach.

§. XXIX.

Ponieważ zamierzylismy sobie uważać same powierzchnie

wierzchnie ciągłe, będą do uwagi naszej należyć same tylko ciała OKRĄGLE TOCZONE (*Corpora tornata*), których powierzchnia wyrobiona jest podług pewnego prawa, czyli raczej opisana linią krzywą ciągłą przez swój obrot, iakimi są KULA (*Globus*), WALEC (*Cylindrus*), i OSTROKRĄG (*Conus*). Przez ciała takowe przechodząc płaszczyzna przecinającą, zostawia różnego gatunku linie krzywe podług różnego swego położenia.

A naprzód odnosząc punkta powierzchni takiego ciała do trzech płaszczyzn głównych, wystawmy sobie powierzchnię przeciętą równo-ległą płaszczyźnie gruntowej SCRD (fig. 46.); tem przecięciem zostawione linie na powierzchni bydl mogą równe, tak dalece że do iakiejkolwiek wysokości podnieśliemy płaszczyznę przecinającą; linia krzywa będzie ta sama, a przeto w takowej powierzchni linia z przecięcia równo-ległego gruntowi zrodzona, jest niezawisła od przystaw wysokości, i zrównanie na takową powierzchnię nie powinno zamykać z, ale bydl powinno takim, iakiem się wyraża linia krzywa będąca zasadą ciała. Wystawmy sobie WALEC PROSTY (*Cylindrus rectus*), którego ZASADA (Basis) jest KOŁO: albo WALEC POCIĄGŁY (*Cylindrus scalenus*), gdzie Ellipsa jest zasadą; przecinając ciało takie płaszczyzną równo-ległą zasadzie, a razem pionową do osi walca, wypadac będą z takowych przecięć same koła między sobą równe na walec prosty, i zrównanie na powierzchnię takiego walca jest $a^2 = x^2 + y^2$: na walec zaś pociągły same będą Ellipsy między sobą równe, przeto zrównanie $g^2 y^2 + k^2 x^2 = g^2 k^2$, będzie wyrażać powierzchnię walca pociągłego. Właśność ta służy wszystkim ciałom WALEZASTYM i GRANIASTO-SŁUPOWYM (*Corpora Cylindrica, prismatica*), i zrównania na powierzchnię takowych ciał nie zamykaia z, bo w nich przecięcia równo-ległe zasadzie rodzą linie proste lub krzywe między sobą równe.

Powtorę przecinaiać ciała płaszczyzną równo-ległą

L4

gruntowi,

Rozstrzaiaia fig
powierzchnie
ciał okrągłych
i linie różne
wypadaiące z
przecięcia ich
płaszczyzną.

Fig. 46.

gruntowi, linie na powierzchni takowem przecięciem zrodzone bydz mogą podobne §. VII. to jest tego samego porządku i gatunku, ale mnieysze lub większe, i na każde takowe przecięcie z staie się ilością staieczną. Wystawmy sobie ostrokrag okragły, którego zasada jest koło (*Conus rectus*), lub pociągły, którego zasada jest Ellipsa (*Conus scalenus*); przecinając od wierzchołka płaszczyzną równo-ległą zasadzie taki ostrokrag, ryłować się będą na powierzchni takowem przecięciem same koła na ostro-kragu okragłym; same zaś Ellipsy na ostro-kragu pociągłym: te zaś koła i Ellipsy nie będą równe, ale będąc rosnąc podług odległości płaszczyzny przecinającej, i ich obwody będą proporcjonalne wysokości $=a$, tak dalece że linia przez punkta te proporcjonalne prowadzona jest prosta; ciała takowe nazywają się OSTRO-KRAGOWE, albo ogólniey OSTRO-GRANIASTE (*Corpora conica, pyramidalia*); przeto zrównanie na te ciała bydz powinno takie, iż na przecięcie ich płaszczyzną przez punkta te proporcjonalne, rozebrać się powinno na zrównania wyrażające linie proste. Takową zaś własność mają wszystkie ZRÓWNANIA IEDNO-RODNE (*Equationes homogeneae*), czyli zawierające we wszystkich terminach równe wymiary ilości odmiennych, x, y, z ; tak dalece, że summa wymiaru w iednym terminie, jest równa summie wymiarów terminu innego któregokolwiek.

A naprzód mieliśmy już przykład pod §. 22. że zrównania iedno-rodne między ilościami odmiennemi iakiem jest n. p. $Ax^{m-n}y^n + Bx^{m-p}y^p + \dots = 0$, rozbierać się mogą na zrównania proste 1go stopnia. Zebyśmy się zaś o tém barziecey przekonali w terażniejszych zrównaniach, wystawmy sobie zrównanie iedno-rodne $z^m = az^{m-n-p}x^n y^p$, którego wszystkie terminy ponieważ tę samę potęgę ilości odmiennych razem wziętych zamykają, dolicz nam na iednym prześtać. Teraz przypuśćmy na fig. 47. że płaszczyzna przecinającą przechodząc przez punkt A jest pionową

nową do płaszczyzny gruntu APM , którą przecina w linii AM , nazwawszy $AP=x$, $PM=y$, $MZ=z$ ponieważ kąt PAM płaszczyzny przecinał się z linią AP , jest nam znany; będzie nam także znany stosunek $AM:AP$, i $AM:MP$, a przeto będzie $y=hx$, gdzie h jest funkcją tego kąta: włożywszy więc w równanie iednorodné za y wartość hx , będzie $z^m = az^{m-n} - p \cdot h^p x^{n+p}$, równanie takiego wzoru iak $Ax^{m-n}y^n + Bx^{m-p}y^p + \dots$ i t. d. $= 0$. więc każda powierzchnia wyrażoną równaniem iednorodném między trzema odmiennymi ilościami x , y , z , przeciętą płaszczyzną pionową na grunt, i przechodzącą przez środek A , wyda linią prostą. Iakoż przecięwszy ostrokrag iakikolwiek pionowo na grunt tak, aby płaszczyzna przecinał się przez os ostrokrag; linie s tego przecięcia zrodzone będą proste przecinał się w wierzchołku. Co służy także wzyśkim ciałom graniasto-łupowym; w których równaniu iedna z ilości odmiennych staie się albo zero, albo ilością staieczną, podług położenia płaszczyzny przecinał się względem płaszczyzn głównych: a przeto równanie na ciało graniasto-łupowe w tém przecięciu będzie tylko iedną ilość odmienną zamykać, którego pierwiastki wyrażają linie proste między sobą równo-ległe. S tych uwag łatwo nam będzie wynaleśdź równanie na powierzchnię ostro-kraga iakiegokolwiek. Niech będzie na fig. 47. ostro-krag pociągły $ADKEL$, którego zasada jest Ellipsa wyrażoną równaniem $g^2y^2 + k^2x^2 = k^2g^2$, odniósłszy iego powierzchnią do trzech płaszczyzn głównych przez współ-ufzykowane $AP=x$, $PQ=y$, $QM=z$, tak aby płaszczyzna gruntowa była równo-ległą zasadzie $DKEL$, i AP równo-ległą osi więkzszey DE ; KL równo-ległą PQ ; wysokość QM równo-ległą osi ostro-kraga CA ; ponieważ przecięcia równo-ległe płaszczyznie gruntowey rodzą Ellipsy podobné, których średnice $DE=g$, $KL=k$, będą miały stosunek staieczny do wysokości z ; to jest $g=mz$, $k=nz$; włożywszy te

L5

wartości

Fig. 47.

wartości w równaniu na Ellipsę, otrzymamy $m^2y^2 + n^2x^2 = m^2n^2z^2$. równanie na powierzchnię szukaną. W ostrokrągu prostym czyli okrągłym, ponieważ obydwie średnice są równe; mamy $m=n$, a przeto równanie $y^2 + x^2 = m^2z^2$ na powierzchnię ostrokrągu prostego.

Linie krzywe
s przecięcia
kuli wypada-
jące.

Fig. 49.

Zostaie nam teraz po przecięciach równoległych i pionowych na grunt przez szrodek A , rostrząsnąć inne przecięcia iakićkolwiek trzech tych ciąg, i wynaleźć linie krzywe, które się stąd na powierzchni rodzą. Całe to działanie zawisło od przeniesienia współ-ufzykowanych s płaszczyzny gruntu na płaszczyznę przecinającą, i od wyrażenia iedney przez funkcyę dwóch drugich, tak aby równanie między trzema odmiennemi ilościami na powierzchnią, przerobić na równanie do dwóch współ-ufzykowanych na linią krzywą przecięciem zrodzoną. Zaczniemy od kuli, na którą równanie $a^2 = x^2 + y^2 + z^2$, między trzema współ-ufzykowanemi na fig. 49. $AP=x$, $QP=y$, $QM=z$. Poprowadźmy płaszczyznę przecinającą przez powierzchnią kuli tak, aby przecięcia płaszczyzny gruntowej w linii TL , uczyniwszy z osią AR kąt $TSR=ASL=p$. Na linią TL przecięcia, spuścmy z Q, M , dwie pionowe QT, MT ; będzie więc kąt $QTM=q$ wyrażać pochyłość płaszczyzny przecinającej do płaszczyzny gruntowej. Od początku odcinków A spuścmy na linią przecięcia pionową AL : chcąc wyrazić linią krzywą tém przecięciem na powierzchni kuli zostawioną, potrzeba mi równanie między x, y, z , przerobić na inne między $ST=t$, i $TM=u$. Nazwiemy AS, m ; będzie $AL=m$ Wś. p , $LS=m$. Dof. p ; od T na oś przeszlą AS spuszczać pionową $TR=t$. Wś. p , $SR=t$. Dof. p ; a ponieważ kąt $QTS=90^\circ$, kąt $PQT=TSR=p$; $QM=u$. Wś. q , $QT=u$. Dof. q ; $PR=u$. Dof. q . Wś. p , $PQ-TR=u$. Dof. q . Dof. p ; a zatem $x=AP=AS+SR-PR$, $y=TR+PQ-TR$, czyli $x=m+t$. Dof. $p-u$. Dof. q . Wś. p ; $y=t$. Wś. $p+u$. Dof. q . Dof. p ; $z=QM=u$. Wś. q ; włoży-

wfzy te wartości w zrównanie na kulę $a^2 = x^2 + y^2 + z^2$; otrzymamy inne między t , u , na koło leżące na płaszczynie przecinałcey. Zebyśmy to zrównanie uczynili prościęyszym, wystawmy sobie że kąt $TSR = 90^\circ$ czyli że płaszczyna przecinałca pada pionowo do osi AS ; będzie więc $Wst.p = t$, $Dost.p = 0$, a przeto $x = m - u \cdot Dost.q$, $y = t$; $z = u \cdot Wst.q$, włożywfzy te wartości w zrównanie na kulę, zamieniemy ie na

$$a^2 = m^2 - 2mu \cdot Dost.q + u^2 Dost.q^2 + t^2 + u^2 Wst.q^2$$

czyli na $a^2 = m^2 - 2mu \cdot Dost.q + t^2 + u^2$. . . położywfzy

$$u - m \cdot Dost.q = s, \quad u^2 - 2m Dost.q = s^2 - m^2 Dost.q^2,$$

$$t^2 - Dost.q^2 = Wst.q^2, \quad \text{wypadnie}$$

$$t^2 + s^2 = a^2 - m^2 Wst.q^2.$$

Zrównanie na koło, którego promień $= \sqrt{a^2 - m^2 Wst.q^2}$, wfzytkie więc przecięcia kuli płaszczyną wydaia koło.

Te same wartości nowych współ-ufzykowanych Przecięcia wal
żużyć nam będą do innych ciał. Mamy naprzód zrównanie na wałec prosty $a^2 = x^2 + y^2$; wystawmy sobie że ten tak iest przecięty od płaszczyny, iż TS pada pionowo na AR , a przeto $p = 90^\circ$, mamy więc $x = m - u \cdot Dost.q$, $y = t$; włożywfzy te wartości w zrównanie $a^2 = x^2 + y^2$ przerobiemy ie na

$$a^2 = (m - u \cdot Dost.q)^2 + t^2, \quad \text{czyli}$$

$$t^2 = a^2 - m^2 + 2mu \cdot Dost.q - u^2 Dost.q^2 \quad (\alpha)$$

zrównanie (α) iest na Ellipsę podług cechy wyłożonéy w §. XIII; chcąc tę Ellipsę lepiej poznać odnieśmy współ-ufzykowane do środka, położywfzy

$$u = s + \frac{m}{Dost.q}, \quad \text{zrównanie się zamieni na}$$

$$t^2 = a^2 - s^2 Dost.q^2 \quad (\beta)$$

Ellipsa więc s tego przecięcia zrodzoná, leży na płaszczynie przecinałcey, mającá swóy środek na osi walca; ós mnieyszą téy Ellipsy iest $t = a$, równá promieniowi koła gruntowego; ós zaś większą iest równá $\frac{a}{Dost.q}$; ponieważ $a < \frac{a}{Dost.q}$, im Dostawa q iest

ilością mnieyszą, to jest, im pochyłość płaszczyzny przecinającej do płaszczyzny gruntowej, jest mnieyszą, tém os, większą wypada dłuższą; a przeto i Ellipsa: co nam daie widzieć, że przecięcie walca prostego płaszczyzną nachyloną do gruntu, zawsze rodzi Ellipsę: im kąt q jest większy, tém ta Ellipsa jest dłuższą; kiedy $q=90^\circ$, os ta staie się nieskończoną, bo $\text{Dofl.}q=0$; czyli os ta staie się linią równoległą osi walca, a przeto przecięcie pionowe na gruncie walca rodzi linie proste między sobą równoległe: im zaś q staie się mnieyszym, tém os większą Ellipsy zbliża się do równości z osią, mnieyszą; i kiedy $q=0$, $\text{Dofl.}q=1$, a zrównanie (β) staie się zrównaniem na koło, więc wszystkie przecięcia walca równoległe gruntowi wydaia koło.

Przystósujemy te same rozumowania do walca podłużnego, którego zasada jest Ellipsa. Zrównanie na taki walec jest $g^2y^2+k^2x^2=k^2g^2$, kładąc $x=m-u$ $\text{Dofl.}q$, $y=t$; przerobiemy ie na

$$t^2 = \frac{k^2}{g^2} [g^2 - m^2 + 2mu \text{Dofl.}q - u^2 \text{Dofl.}q^2] \quad (\gamma).$$

(γ) jest znowu zrównaniem na Ellipsę; niech będzie

$u = s + \frac{m}{\text{Dofl.}q}$, ta wartość włożoną w (γ) , zamieni zrównanie na

$$t^2 = \frac{k^2}{g^2} (g^2 - s^2 \text{Dofl.}q^2) \quad (\delta).$$

os mnieysza téy Ellipsy uczyniwszy $s=0$, wypada $t=k$, to jest ta sama co i Ellipsy gruntowej; os zaś

większa kiedy $t=0$, wypada $s = \frac{g}{\text{Dofl.}q}$, aże

$\frac{g}{\text{Dofl.}q} > g$, więc Ellipsa s tego przecięcia pochyłego

do gruntu jest dłuższą iak zasada. Nazwiemy tę os mnieyszą Ellipsy s przecięcia wypadtęy, daną przez t , nazwiemy

nazwiemy ją mowię ϕ ; oś większą daną przez s ,

nazwiemy ψ , mamy $\phi \cdot \psi = \frac{kg}{Dofl.q}$, czyli $\phi \psi : k.g =$

$\frac{1}{Dofl.q} : 1$. Aż $\frac{1}{Dofl.q} =$ Sieczna. q . §. 51. Algebry,

przeto mamy w ostatniej proporcji tę bardzo piękną prawdę zamkniętą, że przeciąwszy wałec podłużny „płaszczyzną pochyłą do gruntu, otrzymujemy s tego „przecięcia Ellipsę, w której mnogość dwóch osi ma „się do mnogości osi zasady, iako się ma Sieczna po- „chyłości płaszczyzny do wstawy prostej.”

Została nam jeszcze do rostrzafania różne przecię- Przecięcia o-
strokręga, i li-
nie krzywe
stad wypada-
jące.
cia ostro-kręga: żebyśmy tę rzecz nayogólniej ogar-
neli, weźmy do tego ostro-krąg podłużny, z niego
bowiem łatwo nam będzie przyiść do ostro-kręga
prostego czyli okrągłego. Wynaleźliśmy prawdę na

powierzchnią ostro-kręga zrównanie $m^2 n^2 z^2 = m^2 y^2 + n^2 x^2$.

ponieważ nam już wchodzi m w x, y , na przecięcia;

wyrażmy raczcy tę powierzchnią zrównaniem

$g^2 k^2 z^2 = g^2 y^2 + k^2 x^2$. wystawiwszy sobie że zasada

ostro-kręga leży na płaszczyźnie gruntowej APQ

fig. 49. której średnice są g, k . Przeciąwszy ten

ostro-krąg płaszczyzną tak, iak nam fig. 49. pokazu-

je; kładąc $x = m + t.Dofl.p - u.Dofl.q.Wfl.p$;

$y = t.Wfl.p + u.Dofl.q.Dofl.p$. $z = u.Wfl.q$; zrównanie

$g^2 k^2 z^2 = g^2 y^2 + k^2 x^2$ na ostro-krąg podłużmy, wy-
padnie:

$$\begin{aligned} & g^2 k^2 . Wfl.q^2 u^2 - 2 g^2 . Wfl.p . Dofl.q . Dofl.p . t u \\ & - g^2 . Dofl.q^2 . Dofl.p^2 . u^2 + 2 k^2 . m . Wfl.p . Dofl.q . Dofl.p . t u \\ & - k^2 . Dofl.q^2 . Wfl.p^2 u^2 \end{aligned}$$

$$+ 2 k^2 m Dofl.q Wfl.p . u - 2 k^2 m Dofl.p t$$

$$- g^2 . Wfl.p^2 . t^2 - k^2 m^2 = 0 \quad (A'')$$

$$- k^2 Dofl.p^2 . t^2$$

Na ostro-krąg zaś profty gdzie $g = k$, $g^2 z^2 = y^2 + x^2$
zamieni się zrównanie na

$$g^2 . Wfl.$$

Fig. 49.

$$\begin{aligned}
 g^2 \cdot Wfl.q^2 \cdot u^2 &= 2(1-m)Wfl.p \cdot Doft.q \cdot Doft.p \cdot tu - t^2 \\
 - Doft.q^2 \cdot u^2 \\
 + 2mDoft.q \cdot Wfl.p \cdot u - m^2 &= 0 \quad (B''). \\
 - 2mDoft.p \cdot t
 \end{aligned}$$

to zrównanie wyraża linie krzywe drugiego porządku tak, iak i (A''): dla tego żebyśmy na wypadki trafili prościęysze, obieramy sobie do rostrzążania zrównanie (B''), a przeto odcinki różne ostro-kraga prostego. A naprzód przetniemy ostro-krag prosty tak, aby płaszczyzna przecinaiąca była prosto-padła do gruntu, będzie więc $MTQ=q=90^\circ$, $Wfl.q=1$, $Doft.q=0$. wprowadziwszy ten warunek w zrównanie (B''), zamięniemy ie na

$$g^2 u^2 = t^2 + 2mDoft.p \cdot t + m^2 \quad (C'').$$

podług prawideł podanych w §. XIII. i innych w Rozdziale III. §. XIX. rozśdzić nam łatwo, że zrównanie (C'') iest na Hyperbole, którzy ledwo-niestyczne proste zamykają się w zrównaniach $gu+t+mDoft.p=e$, $gu-t-mDoft.p=0$. Znaydziemy tę samą linia krzywą na przecięciu pionowe do gruntu ostro-kraga podłużnego, wprowadziwszy w (A'') kondycyą, że $Wfl.q=1$, $Doft.q=0$. przeto ostro-krag iakikolwiek przecięty pionowa do gruntu i zasady swoiszy, wydaie Hyperbole.

Niech teraz płaszczyzna przecinaiąca padnie pochyło na grunt tak aby ieę przecięcie TL było pionowe do osi AR na fig. 49. będzie więc $TSR=p=90^\circ$, $Wfl.p=1$, $Doft.p=0$, wprowadziwszy te warunki w zrównanie (B'') zamięniemy ie na

$$t^2 = (g^2 Wfl.q^2 - Doft.q^2) u^2 + 2mDoft.q \cdot u - m^2 \quad (D'')$$

gdyby przecięcie albo pochyłość płaszczyzny przecinaiącej, do gruntowej była taká, iż $g^2 Wfl.q^2 = Doft.q^2$,

czyli $\frac{1}{g} = Sty.q$. linia krzywa s takiego przecięcia

zrodzoná byłaby Parabola opisaná zrównaniem $t^2 = 2mDoft.q \cdot u - m^2$

ieżeli

jeżeli zaś $g^2 W \beta . q^2 - D o \beta . q^2$ nie będzie zero, żebyśmy dokładniej tę linią przecięciem zrodzoną poznali, odnieśmy współ-ufzykowane do środka położymy

$u = s - \frac{m . D o \beta . q}{g^2 W \beta . q^2 - D o \beta . q^2}$, zrównanie (C'') zamieni się na

$$z^2 = (g^2 W \beta . q^2 - D o \beta . q^2) \left[s^2 - \frac{g^2 . W \beta . q^2 m^2}{(g^2 W \beta . q^2 - D o \beta . q^2)^2} \right] \quad (E'').$$

gdzie widzimy oczywiście, że jeżeli $g^2 W \beta . q^2 > D o \beta . q^2$, linią krzywą odryta płaszczyzna przecinałką będzie Hyperbola; jeżeli zaś $g^2 W \beta . q^2 < D o \beta . q^2$, linią krzywą będzie Ellipsa: na Ellipsę więc $Sty . q < \frac{1}{g}$, na

Hyperbolę $Sty . q > \frac{1}{g}$, na Parabolę zaś $Sty . q = \frac{1}{g}$, po-

niéważ g wyraża promień koła gruntowego niech będzie $g = 1$: wypadną na Parabolę $Sty . q = 1 = Sty . 45^\circ$. Na Ellipsę $Sty . q < Sty . 45^\circ$. na Hyperbolę $Sty . q > Sty . 45^\circ$.

Wystawmy sobie na fig. 50. przecięcie ostro-kręga przez wierzchołek D i środek C prostopadle na grunt; wypadnie trójkąt DAB równo-ramienny, linie DB , DA będą bokami ostro-kręga, CA promień koła gruntowego, DC osią ostrokręga: poprowadziwszy linią prostą EC s środka tak; aby był kąt $ACE = 45^\circ$; będzie EC równo-ległą DB , więc kiedy płaszczyzna przecinałką ostro-krąg będzie równo-ległą do jego boku DB , linią krzywą s tego przecięcia zrodzoną będzie Parabola; kiedy zaś ta płaszczyzna padnie na grunt pod kątem mniejszym od 45° , jakim jest n. p. LCA ; to jest kiedy przeciągniona za linią CL co raz barziej od BD oddalać się będzie ku stronie D , linią krzywą stąd zrodzoną będzie Ellipsa: kiedy nakoniec płaszczyzna przecinałką padłszy pod kątem większym od 45° na grunt, w przeciągnięciu schodzić się będzie z bokiem ku stronie BD , a oddalać się coraz barziej od tegoż boku ku stronie DB , linią krzywą s takiego

Fig. 50.

s takiego przecięcia zrodzona będzie *Hyperbola*. Przecięcie więc ostro-krağa wydaie wszystkie linie krzywe 2go porządku, które stąd wzięty imie OD-CINKÓW OSTRO-KRĄGOWYCH (*Sectiones Conicae*.)

§. XXX.

Wyrażaia się
przez zrówna-
nia powierz-
chnie ciał po-
wstające z o-
brotu ślanych
linii krzy-
wych 2go po-
rządku.

Wszystkie powierzchnie ciał dotąd od nas uważa-
né, będąc wyrażone zrównaniem zawierającym trzy
współ-ufzykowane x, y, z , w drugim stopniu, są po-
wierzchniami 2go porządku; te przecięte płaszczyzną
nie wydały linii krzywych wyższego porządku nad
ten, do którego same należą: nie mogą bowiem ta-
kowe powierzchnie powstać tylko z obrotu linii 2go
porządku. I tak powierzchnia *kuli* powstaje z obro-
tu obwodu koła około swęj średnicy: walec z obro-
tu linii prostej leżącej na obwodzie koła lub Ellipsy;
i prosto-padłej do płaszczyzny gruntu. Ostrokrağ s
podobnego obrotu linii prostej przecinaiający wyfo-
kość ostro-krağa w jego wierzchołku, a zatem nachy-
lonęj do płaszczyzny gruntu pod tym samym ką-
tém. Wszystkie te powierzchnie 2go porządku wy-
razić możemy zrównaniem ogólnem $Z^2 = x^2 + y^2$,
gdzie Z^2 jest ilością stałą na ciału graniaisto-flupo-
wé, których boki są sobie równo-ległe: jest zaś Z^2
funkcją wyfokości z na ciału ostro-graniaistém. Zeby-
śmy nic nie opuścili co do wiadomości innych ie-
szcze powierzchni 2go porządku należy, rodzących się
z obrotu ślanych linii krzywych 2go porządku, tak
jak *kula* rodzi się z swego obrotu koła; pomyślmy,
że na fig. 8. Tabl. II. linia krzywa $R'B.M$ jest 2go
porządku, którą oś $R'S$ dzieli na dwie części równe
i podobne: obrociwszy takową linią około swęj
średnicy $R'S$, obwód ięj opiszę powierzchnią krzy-
wą: iakże takową powierzchnią wyrażemy zrówna-
niem? łatwo każdy poymuie, że natura takowey po-
wierzchni zależy od oznaczenia funkcji należytej Z .
Na ten koniec odnieśmy tę powierzchnią do trzech
płaszczyzn głównych wyrażonych na fig. 51. przez
trzy współ-ufzykowane pionowe $RP=x$, $PQ=y$,
 $QM=z$,

Fig. 8.

Fig. 51.

$QM=z$, przez punkt M , i początek odcinków R spuścmy płaszczyznę przecinającą, pionowo do płaszczyzny gruntowej RQP , tak, że linią RQ będzie linią przecięcia; ta płaszczyzna odetnie linią krzywą takiej natury, z której obrotu powstała powierzchnia, i ta linią krzywą będzie cała leżyc na płaszczyźnie przecinającej, której zrównanie wyrazi się przez dwie współ-ufżykowane RQ, QM . Dámy że ta powierzchnia powstała z obrotu Ellipsy; więc punkt M leży na Ellipsie, na którą mamy na końcu §. XIII.

zrównanie (A') $RQ^2=fz-\frac{f}{g}z^2$: gdzie f znaczy linią równania cała, g oś większą Ellipsy; będzie więc funkcyą Z , $fz-\frac{f}{g}z^2$ na terażniejszy przypadek; aże $RQ^2=x^2+y^2$, przeto

$$fz-\frac{f}{g}z^2=x^2+y^2 \quad (M').$$

jest zrównaniem na powierzchnią opisaną przez obrot Ellipsy około swojej średnicy, czyli na powierzchnią *Sferoidy*.

Gdyby linią opisującą powierzchnią była Parabola; punkt M na fig. 51. będzie punktem należącym do Paraboli, gdzie $g=\infty$; wprowadziwszy tę kondycyą w zrównanie (M'), wypadnie zrównanie na powierzchnią Paraboliczną:

$$fz=x^2+y^2 \quad (M'').$$

gdyby zaś powierzchnią krzywą opisaną była obrotem Hyperboli, gdzie oś większą jest zewnętrzną linii krzywej, wprowadziwszy $-g$, za g w (M'); otrzymamy zrównanie na powierzchnią Hyperboliczną;

$$fz+\frac{f}{g}z^2=x^2+y^2 \quad (M''').$$

Spółób ten wyrażania linii krzywych rodzących się z przecięcia powierzchni krzywej płaszczyzną, nie może służyć tylko kiedy linią krzywą tak leży na

M

po-

Fig. 51.

Sposób prze-
noszenia linii
krzywych z
wielu płasz-
czyzn na jedną

powierzchni, że ią całą płaszczyzna przecina iąć może: to jest, kiedy ią za pomocą przecięcia z niezliczonych płaszczyzn możemy przenieść na iedną: ale kiedy linią krzywą tak leży na powierzchni, iż iey płaszczyzna przecina iąć nie może zagarnąć, sposób dopiero wyłożony nie może służyć. Linię bowiem krzywę nie można poznać tylko przez zrównanie między dwiema odmiennymi ilościami, do którego nam łatwo było przyiść rachuiąc linią krzywą całą położoną na płaszczyźnie przecina iąć, gdzie trzy współ-ufżykowane x, y, z , do powierzchni, potrafilimy za pomocą Trygonometrii wyrazić przez dwie t, u , do linii krzywę. Zastanówmy się z uwagą nad tą nową trudnością. Nie możemy poznać linii krzywę tylko przez zrównanie między dwiema współ-ufżykowanemi; więc nam koniecznie potrzeba linią krzywą przenieść z niezliczonych płaszczyzn na iedną, i zrównanie na powierzchni między x, y, z , przerobić na inne między dwiema tylko odmiennymi ilościami. A przeto trzeba nam koniecznie mieć dwa zrównania na powierzchni, za pomocą których wyrzuciwszy iedną odmienną n.p. z , wypadnie zrównanie między x, y , na linią krzywą. Tu uważmy naprzód, że dwa te zrównania bydz powinny różne, więc każde wyrażać będzie inną powierzchnią; z nich nie możemy wyrzucić żadney ilości odmiennę, jeżeli iey wartość nie będzie spólną obydwom powierzchniom, a przeto jeżeli współ-ufżykowane iedney powierzchni nie będą do téj samęj osi, i do tego samęj początku odcinków odnoszone co i drugie; i jeżeli punkta iedney powierzchni nie znidą się s punktami drugiey, w linii krzywę szukaney: to jest, takię linię krzywę nie możemy poznać, tylko przez przecięcie powierzchni od drugiey powierzchni takie, aby powierzchnią przecina iąć przeszła przez wszystkie punkta linii szukaney. Iako więc linie krzywę leżące na iedney płaszczyźnie, poznamy za pomocą prze-

przecięcia powierzchni płaszczyzną; tak linie krzywe leżące na różnych płaszczyznach poznać możemy przez przecięcie powierzchni drugą powierzchnią. To zaś powtórne poznawanie dzieje się przez Eliminacyą; gdzie znowu widzemy podobieństwo teraźniejszego sposobu s tym, któregośmy użyli na składnią zrównań pod §§. XVI. XVII. Przypomniemy sobie tamto działanie, abyśmy lepięj zrozumieli teraźniejszy. Od dwóch zrównań wyrażających dwie linie odnufzone do téj samej osi i do tego samego początku odcinków na punkta N, M, (fig. 45.) przyszlizamy do zrównania na punkta Q, P; więc tem wyrzucaniem lednój ilości odmiennój, punkt N przenieśliśmy na punkt Q, punkt zaś M, na punkt P, przez pionowe NQ, MP, to jest punkta z lednój linii przenieśliśmy na drugą; podobnie i teraz mając dwa zrównania między $AP=x$, $PQ=y$, $QM=z$, (fig. 52), na dwie powierzchnie przecinające się, i te przerabiając na ledno między y , x , punkt M przez pionową przenosząmy na punkt Q, i całą linią krzywą RMN, przenosząmy tym samym sposobem na SQT, czyli na płaszczyznę BAD; linią SQT nazywamy RZUTEM, albo PRZENIESIENIEM linii RMN. (*Projeccio curvae*); a iako pod §. XVI. poznaliśmy oczywiście że nie zawsze pierwiastki rzetelne w zrównaniu oznaczonem pokazują przecięcia, tak i tu trzeba nam pamiętać, że lubo zrównanie na rzut linii będzie mieć wartości rzetelne, i wyrażać prawdziwe linii krzywey przeniesienie; nie zawsze jednak z rzetelności rzutu należy wnosić o rzetelności linii na powierzchni ciała zstających: bo do tego ieszcze należy się przekonać, że pionowe przenoszące linię s powierzchni na płaszczyznę, są także rzetelne; do czego pomoc nam powinny wzyfkie rozumowania pod §. XVI. wyłożone. Pamiętajmy ieszcze i o tém, że odnufząc powierzchnię do trzech płaszczyzn głównych, możemy na którakolwiek z nich ciśnąć linią krzywą, eo zawisło od ilości

M2

odmien-

Fig. 45.

Fig. 52.

odmiennę którą wyrzucamy. Jeżeli z dwóch równań wyrzucamy z , otrzymując inne między x, y ; ciskamy na ten czas linią krzywą na płaszczyznę BAD : kiedy zaś wyrzucamy y , zostawiając z, x , ciskamy ją na płaszczyznę CAD : nakoniec ciskamy linią krzywą s powierzchni na płaszczyznę CAB , wyrzucając x . A iako na ciskanie linii krzywych na płaszczyznę potrzebujemy dwóch równań do powierzchni; tak też chcąc z rzutu poznać linią krzywą na powierzchni leżącą, jeden rzut nigdy nam nie wystarczy, ale ich trzeba koniecznie dwa: co oczywiście wypada s samej natury powierzchni, na którą potrzebujemy równań między trzema odmiennymi ilościami. Weźmy za przykład kulę przeciętą od płaszczyzny pochytej do gruntu, i szukajmy rzutu linii krzywej tym przecięciem zrodzonej. Mamy dwa równania na powierzchnią kuli $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; i na powierzchnią płaską $Ax + By + Cz = D$; wyrzuciwszy z , otrzymamy równanie na rzut koła.

$$D^2 - D^2 a^2 - 2DBy - 2ADx + (A^2 + C^2)x^2 + (B^2 + C^2)y^2 + 2Bxy = 0.$$

które wyraża Ellipsę. Każde więc koło nachylone do jakiej płaszczyzny, i ciśnione na nią, wydaie Ellipsę; tak iako każda linią krzywą rzuconą przez pionowe na tę samę płaszczyznę gdzie leży, daie linią prostą, czyli linią prostą jest zawsze rzutem linii krzywej, na tę samę płaszczyznę leżącey.

Sztuka ta przenoszenia linii, z iednej płaszczyzny na drugą przez linie pionowe, będąc prawie dla oka naszego w wiedzeniu ciał odległych, zrodziła naukę osobną nazwaną *Perspektywa*, która jest gruntem rysunku i malarstwa. Oko nasze nie widzi ciał tylko przez linie proste, przez które światło się roschodzi: nie mogąc sądzić z oka o odległości rzeczy, wiemy tylko że ciało sprawujące w nas czucie, znajduje się na linii prostej od siebie do oka prowadzonej, ale nie wiemy na którym punkcie tej linii

Tłómaczy się
wzięcie ciska-
nia ciał i linii
na powierz-
chni w sztuce
rysunków.

linii leży: jeżeli to ciało jest niezmiernie od nas oddalone, i ma cząstki jedne mniey, drugie więcey od nas odległe; wszystkie te różnice odległości przed okiem naszym nikną, tak dalece że je wszystkie do jedney odległości odnoszemy: i tak ciała Niebieskie, iako to n.p. Xigżyc lub Słońce będąc okragłe, i kuliste, widzemy płaskie; bo wszystkie punkta ich powierzchni wypukłej, odnoszemy przez linie pionowe do płaszczyzny przez środek ciała przechodzącej i pionowej na linią od środka ciała do oka naszego prowadzoną. Spółb wyrażenia ciała tak, iak by się oku naszemu pakazało, gdyby to s pewney iakięy odległości na nie patrzyło, wypadá s teoryi dopiero wyłożonęy: i tak koło lub iakakolwiek linią krzywą oddaloná od nás, ale położoná na téy samey płaszczyźnie z okiem, i do niego obwodem obróconá, widzianá będzie iak linią prostá; bo wszystkie punkta téy obwodu oko odnosić będzie do linii prostej prowadzonęy przez środek linii krzywęy, tak iak koło ukośnie od oka w wielkiey odległości widziané, zamieni się w Ellipsę. S tego prawa sztuka rysunku ciáł różnych zależy na tém; iż obiera się naprzód pewné położenie i miejsce dla oka: między niem i ciásem kładzie się płaszczyzna przeźroczysta, czyli Táblica; linie od ciała do oka prowadzone przechodzą przez tę płaszczyznę, i gdzie każdá Táblicę przecina, tam jest miejsce punktu, s którego liniá wychodzi. Weźmy sobie za przykład spółb rysowania Mápp, czyli kárt Geograficznych, gdzie jest cała kulá lub część powierzchni ziemi odmalowaná. Te kárty różne mieć mogą postaci podług różnego położenia oka względem kuli ziemskiey. Jeżeli oko położemy w środku ziemi, Táblica będzie dotyczyć się kuli, na której się każdy punkt koła odmaluie tam, gdzie się kończy styczná iego łuku; styczná rośnąc znacznie, rościągná powierzchnią pół-kuli do odległości nieskończonęy; i dla tego na takich kártach nie maluią się więkšie części powierzchni od 45°.

Aże oko znajdując się w środku, znajduje się razem na płaszczyznach wszystkich południków i kół większych; te koła rysują się iak linie proste. Takowe położenie oka daje się w kartach kuli niebieskiej. Powtóre oko położyć możemy w biegunie kuli; Táblica na tén czas będzie w samym średniku, na którą ciska się cała powierzchnia pół kuli leżąca na stronie drugiego bieguna. Ponieważ w biegunach znowu się wszystkie Południki przecinają, oko znajduje się na wszystkich tych płaszczyznach, przeto południki na takowych kartach wyrażają się przez linie proste, koła zaś równoległe zostawszy przy swojej figurze rosną od bieguna tak, iako stycznė łuków zawierających połowę szerokości geograficznej. Ciskanie takowė powierzchni kuli nazywá się BIEGUNOWEM (*Projectio polaris*), tak iak pierwśle nazywá się SRZODKOWEM (*Projectio centralis*). Użycie ciskania biegunowego má miejsce w rysowaniu pół-kuli ziemskiej lub niebieskiej. Nakoniec położyć możemy oko na samej powierzchni kuli, Táblicę zaś na HORIZONCIE miejsca przechodzącym przez środek kuli. Koło, to równoległe gdzie się oko znajduje, wyrażá się zawsze przez linią prostą; czego mamy przykład w dzisiejszych kartach ziemskich, kiedy połowę kuli na płaszczyznę południka ciskamy, położywszy oko w samym średniku. Dawni Geografowie rysując nawet kráy iaki, obierali średnik na położenie oka; i dla tego ich karty wyrażały miejsca ziemi nadto ukośno i od podobieństwa dalekie. W dzisiejszych kartach chcąc rysować kráy iaki, bierze się miejsce między dwiema południkami i dwiema równoległymi kołami zawarte, gdzie się kráy tén zamyka; z środka tego kraju prowadzi się linią prostą przez środek kuli aż na stronę przeciwległą, gdzie się oko znajduje patrząc na kráy przez Táblicę umieszczoną w środku kuli, i prostopadłą do linii prostej dopiero opisaney; południk tego miejsca średniego na przeciwko któremu oko leży, będąc na jednéj płaszczyźnie

szczyźnie z okiem, zamienia się na linią prostą, inne zaś południki wypadając z przecięcia ukośnego kuli, są porcyami Ellipsy: bo ogólnie mówiąc: wszystkie południki zboczne dla oka, kiedy się to znajduje na powierzchni kuli, zamieniają się w Ellipsy, podług teorii wyżej wyłożonej. Gdyby ta nauka rysowania kart, nie była nad to rościągła i obcą dla celu, któryśmy sobie założyli; weszlibyśmy we wszystkie jej szczególności; ale ponieważ nam wypadnie w częściach Fizyczno-Matematycznych pokazać użycie tych ogólnych początków rachunku, któreśmy w tym dziele rzucili, znaydziemy tam przyzwolifze miejsce dla materyi teraz wspomnioney.

ROZDZIAŁ SZOSTY.

O własnościach linii krzywych PRZESTĘPNYCH i ich znakomitszych gatunkach.

§. XXXI.

Linie krzywe będąc całkiem zawisłe od funkcyi w ich zrównaniach wchodzących, mieć powinny na-przód ten sam podział, który służy funkcyom, i takie własności, iakich w zrównaniach ich, funkcyę wy-
ciągają. We wszystkich dotąd uwagach naszych sa-
me zrównania i funkcyę Algebraiczne były źródłem
wyłożonych własności na linie krzywe: gdzie sama
natura Rozciągłości (*Extensio*) położyła granice ba-
daniom naszym; ponieważ stanąć musieliśmy na zrów-
naniach nieoznaczonych między trzema odmienné-
mi ilościami, dla tego, że każda z nich potrzebuje
innego wymiaru, nie mamy w naturze więcej wy-
miarów nad trzy, które wespół-ufżykowane zabraty.
Zostaie nam ieszoze poznać linie krzywe wyrazone
zrównaniem, w które funkcyę przestępną wchodzi.
Dwa są rodzaje funkcyi przestępnych, któreśmy w

drugiej części wyłożyli, to jest Logarytmy i Łuki kół. Każdy z nich ma tę ogólną cechę, że do rozwiązania równania takową funkcją zawierającego, potrzebujemy działań całych różnych od działań algebraicznych; że wartości czyli pierwiastki takowych równań zawisły istotnie od szeregów nieskończonych których równaniem algebraicznym ogarnąć nie podobną. Ten ostatni charakter jest istotniejszy od pierwszego, bo do funkcji algebraicznych możemy działań użyć przestępnych, które całych natury funkcji nie zamieniają. Wszakże Teorya granic w Rozd. III. wyłożoną, jest działaniem przestępnym; którą przecie ani równań ani linii krzywych tam wyłożonych nie uczyniła przestępnymi: i cała Matematyka wyższą używając takowych działań na funkcye nawet Algebraiczne, wzięła imię Geometrii przestępnej, lubo funkcye takowemi działaniami w swę naturę zostawia nienaruszoną co do terazniejszego podziału.

Wszystkie funkcye mające albo ilość odmienną, albo niewymierną rzetelną za wykładnika, zawisły od Logarytmów; tak, iak funkcye z wykładnikami urojonemi zawisły od łuków kół: pierwsze wyrażają się równaniem $y=a^x$ albo ogólnie $y=Aa^{x:f}$; drugie równaniem $y=\text{Ł. Wst. } x$ albo $y=\text{Ł. Dost. } x$, albo $y=\text{Ł. Wst. l. } x$, gdzie Ł. znaczy łuk kół, l. logarytm, podług §§. 48. 51. Alg. Mogą ieszcze znajdować się równania inne przestępne, których przez Algebrę nie bylibyśmy w stanie poznać, i dla tego i do innej nauki odkładamy. Uważmy naprzód iakie własności mieć powinna linia krzywa wyrażoną równaniem $y=a^x$. Nadając ciągle x wartości dodatnie, y rośnie, i nigdy nie przestaje być dodatnim i rzetelnym; kładąc znowu za x , wszystkie wartości odjemne całkie, y coraz barziej ubywa, ale nie przestaje być ieszcze rzetelnym i odmiennym, to jest:

$$\begin{array}{l} x=0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots m \\ \text{na } y=1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, \dots a^m \end{array}$$

—1, —2, —3, —4 ... —m

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^4} \dots \frac{1}{a^m}$$

więc linia krzywa wyrażoną zrównaniem $y=a^x$ z iedney strony początku odcinków A na fig. 53, powinna rosnąć w przyślawach bez końca; z drugiey strony powinna bez końca ubywać: a przeto oś QC , iest iey ledwo-niestyczna. Cała zaś ta linia leżyć będzie nad osią, gdzie miysce przyślaw dodatnych przypada. Kiedy x równie rośnie lub ubywa, przyślawy sobie przyległe mają tén sām nieodmienny stółunek, i kiedy odcinki wzrastaia lub ubywaia przez postęp Arytmetyczny, przyślawy rosną lub ubywaia przez postęp Geometryczny: a przeto odcinki są logarytmami przyślaw; każda przyślaw iest średnią proporcjonalną między dwiema odcinkami iey przyległemi, i równo od niey odległemi. Linia krzywa na fig. 53. tén iest náprzód znakomitá, że mając iedną ledwo-niestyczną, má tylko iedną nieskończoną odnogę: kiedy w liniach Algebraicznych każda ledwo-niestyczna miała dwie odnogi bez końca się ciągnące. Tu widzemy oczywiscie, że na przyślawę zero, odpowiada odcinek nieskończony odiemny; tak iak na przyślawę nieskończoną dodatną, odcinek nieskończony dodatny; i z iedney strony linia krzywa zbliża się do osi, z drugiey strony od niey się bez końca oddala. Aże podług wyłożonych dopiero włafności $AP=\log.PM=\log.(1.PM)=\log.1+\log.PM$: dowiedliemy zaś pod §. 55, Algeb. że iedność má nieskończoną liczbę logarytmów, s których tylko ieden o iest rzetelny, a wszystkie uroione; więc każdemu odcinkowi będzie odpowiadać nieskończoną liczbą przyślaw, s których iedna iest tylko rzetelna, a wszystkie inne uroione: to iest, linia krzywa nie będzie tylko w iednym miyscu od przyślawy przecięta. Jeżeli iednak za x brać będziemy ułomki z mianownikami parzystymi n.p. $x=\frac{2}{3}$, będzie

$$M5 \quad y=\sqrt{a^3}$$

Fig. 53.

$y = \sqrt{a^2}$; znak pierwiastkowy mając koniecznie dwa znaki \pm do siebie przywiązane, pokazuje iestestwo przystaw w linii krzywey pod osią PQ, że atoli dwoiste przystawy nie wypadają na każdą wartość x , nie uczynią pod PQ odnogi ciągłej, ale tylko zofstawią punkta oderwane pod osią. Będzie więc linia krzywa miała znaczną liczbę punktów pod CQ od siebie cale oddzielnych i oderwanych, które żadnego łuku ciągłego linii krzywey nie złożą; co iest znowu szczególniejszą własnością, iakiéysmy w żadnej linii Algebraicznej nie dostrzegli.

Chcąc prowadzić styczność do iakiegokolwiek punktu M téy linii krzywey, potrzeba nam znaleźć podstyczną PT, użyjmy do tego sposobu podanego w §. XXI: w zrównaniu naprzód na linią krzywą $y = a^x$ czyli $\log. y = x \cdot \log. a$, położmy p za x , q za y ; otrzymamy $\log. q = p \cdot \log. a$: powtóre $x = p + t$, $y = q + u$, wypadnie $\log. (q + u) = (p + t) \log. a = \log. q + t \log. a$, czyli $\log. \left(\frac{q + u}{q} \right) = t \log. a$; $1 + \frac{u}{q} = a^t$. Aże do-

wiedliśmy w Algebrze pod §. 49. w zrównaniu (A), że $a^t = 1 + kt + \frac{k^2 t^2}{1.2} + \frac{k^3 t^3}{1.2.3} + i. t. d.$ więc $\frac{u}{q} = kt + \frac{k^2 t^2}{1.2} + \frac{k^3 t^3}{1.2.3} + i. t. d.$ (ψ).

odrzucawszy wszystkie potęgi wyższe t , i porównawszy (ψ) z (λ) w §. XXI; mamy $A = k$, $B = -\frac{1}{k}$, $PT = -\frac{Bq}{A} = \frac{1}{k}$; aże $\frac{1}{k}$ w §. 49. Alg. iest liczbą nazywaną zamiennikiem, Rużając do przerobienia logarytmów iednego układu na drugi; więc w linii krzywey terażniejszey, którą nazywają LOGARYTMICZNĄ (Curva Logarithmica) Podstyczna iest linią nieodmienną, równą właśnie téy liczbie, od której każdy układ Logarytmów zależy. I tak podstyczna w Logarytmach

garytmach Briggsiusza jest $0,4342944819$ i t.d. w Logarytmach zaś hyperbolicznych też podstyczna równa jest jedności. I tać to jest nąyglówniejszą własność linii Logarytmicznej: że w niej podstyczna będąc nieodmienną, jest razem LINIĄ RÓWNAŃ (Perameter) iednego układu Logarytmów z drugim.

§. XXXII.

Drugi rodzaj linii krzywych przestępnych zawisł od łuków koła: na który obierzmy sobie za przykład zrównanie nąyprościejsze $y = m \cdot \text{Ł.} \cdot W \cdot \beta \cdot x$, gdzie przyśtawa jest proporcjonalna łukowi mającemu $W \cdot \beta \cdot x$; aże wiemy z §. 52. Algebry, że $W \cdot \beta \cdot x$ ma nieskończoną liczbę łuków do których należy, będzie także y miało nieskończoną liczbę wartości, i linią krzywą takim zrównaniem opisaną będzie w nieskończonej liczbie punktów przeciętą od linii prostey. Niech będzie u nąymniejszy takowy łuk, którego wstawa x , P niech wyraża pół-obwodu koła; wiemy z §. 52. Algebry że do wstawy x należą łuki.

$u, P-u, 2P+u, 3P-u, 4P+u, 5P-u \dots$
 $-P-u, -2P+u, -3P-u, -4P+u, + \text{ i t. d. } \dots$

$2nP+u, (2n+1)P-u$
 $-2nP+u, -(2n+1)P-u$

Przypátrzymy się składni takiego zrównania, s którego mamy proporcję; $1:m = \text{Ł.} \cdot W \cdot \beta \cdot x:y$, to jest odrysowałszy koło na fig. 54. którego promień $AB=i$, i wziawszy $AP=x$, będzie $EF = \text{Ł.} \cdot W \cdot \beta \cdot x$, będzie $1:m = EF:PM$, ale oprócz tego będą proporcye $1:m = P-EF:PM'$ - - $1:m = 2P+EF:PM''$ i t.d. to samo wypadnie nám na przeciwny stronie średnicy BC , i linią krzywą opisaną zrównaniem $y = m \cdot \text{Ł.} \cdot W \cdot \beta \cdot x$ rościąganie się w nieskończoną odległość z obydwóch stron średnicy BC , i przyśtawa y mieć będzie wartości bez końca: każda więc linią prostą równoległą linii BC , będzie średnicą linii krzywey; co jest własnością szczególnie liniom krzywym przestępnym flużącą. To cośmy dopiero widzieli na linią krzywą

Linie krzywe
 przestępne za-
 wisłe od łuków
 koła.

Fig. 54.

zamkniętą w równaniu $y=m.\dot{L}.Wst.x$, fluży na linię krzywą $y=m.\dot{L}.Dof.x$, $y=m.\dot{L}.Sty.x$, $y=m.\dot{L}.Siec.x$ i t.d. położywszy bowiem $x=\frac{1}{2}P-z$, będzie $Wst.x=Dof.z$, $y=m.\dot{L}.Dof.z$, które jest tego samego wzoru co $y=m.\dot{L}.Wst.x$. Wszystkie zaś inne linie Trygonometryczne są funkcyami Wstów i Dofów.

Do tego rodzaju należą linie krzywe, które nazywano KOŁOWE (*Cycloides*, *Trochoides*), i linie SLIMAKOWE (*Spirales*): pierwsze mają swoje nazwisko od koła będąc opisané od punktu na jego obwodzie położonego: drugie od swej figury podobnej do skorupy ślimaka. Właściwości takowych linii krzywych są bardzo rozległego w Mechanice użycia, do których wyłożenia potrzebuemy wyższej teorii nad tę, którą nam Algebra tłumaczy. Oprócz tego rozmaite gatunki tych linii krzywych wypadają z różnego prawa biegu, które punktowi opisującemu nadałemy, a przeto podpadać jeszcze nie mogą w tém dziele naszym uwagóm. Zebyśmy sobie jednak potrafili wyślawić obraz takowego rodzaju linii namieniemy przynajmniej o nich, ile nam terazniejszy pozwolą początki. Wyślawmy sobie na fig. 55. że koło CMB toczy się po linii prostej BP', w tym obrocie punkt A średnicy przedłużonej, kiedy ta zostanie nieodmienną, opisze linią krzywą AFA', którą nazwano KOŁOWĄ (*Cyclois*), iakaż będzie natura tej linii? Widziemy oczywiście że obwód koła tocząc się po linii prostej BP' rozwinie się na nią, czyli obwód koła będzie równy całej linii prostej prowadzonej od B aż do tego punktu, gdzie po obrocie skończonym punkt B powtórnie padnie na BP', i każdy łuk koła równy będzie tej części, po której się przetooczył. Jeżeli więc łuk B'G przetoczył się przez linią BG, nazwawszy łuk B'G, z; będzie $z=BG$, aże ten łuk jest miarą kąta B'S'G, więc kąt B'S'G= $\frac{z}{a}$; gdzie

a wyraża promień S'G=SB, przeto kąt GS'A'=180°

$$-\frac{z}{a};$$

Fig. 55.

$-\frac{z}{a}$; nazwiemy $S'A' = SA = b$, będzie $A'Q = b.W\sqrt{\frac{z}{a}}$,

$S'Q = -b.Dof\sqrt{\frac{z}{a}}$, $AP = x$, $PA = y$, mamy $y = z + b.W\sqrt{\frac{z}{a}}$

$x = b - b.Dof\sqrt{\frac{z}{a}}$, czyli $b.Dof\sqrt{\frac{z}{a}} = b - x$, potrzeba nam

za pomocą ostatecznego zrównania wyrazić z przez x ,

abyśmy y wyrazili przez x : $Dof\sqrt{\frac{z}{a}} = 1 - \frac{x}{b}$ - więc

$W\sqrt{\frac{z}{a}} = \frac{\sqrt{(2bx - x^2)}}{b}$, a przeto $z = a.L.W\sqrt{\frac{\sqrt{(2bx - x^2)}}{b}}$,

włożywszy te wartości w zrównanie $y = z + b.W\sqrt{\frac{z}{a}}$; otrzymamy na linię kołową:

$$y = \sqrt{(2bx - x^2)} + a.L.W\sqrt{\frac{\sqrt{(2bx - x^2)}}{b}} \quad (\alpha).$$

albo rachując odcinki od środka S , i biorąc $t = b - x$,
 $b^2 - t^2 = 2bx - x^2$.

$$y = \sqrt{(b^2 - t^2)} + a.L.Dof\sqrt{\frac{t}{b}} \quad (\beta).$$

ponieważ $Dof\sqrt{\frac{t}{b}}$ ma nieskończoną liczbę łuków; y

ma nieskończoną liczbę wartości, które sobie łatwo wyobrażemy, uważając linię prostą BP' pociągniętą w odległość nieskończoną, i po niej toczące się bez końca koło CMB , które opisze swym obrotem nieskończoną liczbę Cykloid sobie przyległych, zamkniętą w zrównaniu (β) . Jeżeli położymy $b = a$, już nie punkt A , ale punkt C będzie punktem opisującym, skąd wypadnie linię kołową krótszą. Różne gatunki tej linii krzywey wyniknąć mogą z różney wielkości linii SA , albo z różnego obrotu koła CMB , które się nazywają KOŁEM RODZĄCYM (*Circulus generator*),

rator), tocząc n.p. koło po obwodzie innego koła, albo po odnodze innej jakieś linii krzywéj, otrzymamy różne figury linii krzywéj stąd zrodzonej, których uwaga, że jest nadto zawikłana dla rachunku algebraicznego, odkładamy ją do Mechaniki, gdzie nam się pokaże użycie iéy w zegarach. Przystąpmy już do uważania drugiego rodzaju linii przestępnych zawiśłych od łuków koła.

Fig. 56.

Na fig. 56. pomyślny sobie, że punkt B promienia SB obraca się około środka S biegiem iednostajnym, i opisuie obwód koła $BANB$, kiedy zaś promień SB zaczyna taki obrot, wystawmy sobie, że w tym samym czasie punkt ruchomy z środka S bieży po promieniu SB, s taką samą chyżością, z jaką się promień opisuiący obwód koła obraca; i kiedy punkt B opisze obwód koła, punkt wychodzący z środka S przejdzie przez promień cały SB, w tym dwoiakim biegu punkt wychodzący z środka opiszé linią krzywą SMB , którą nazwano ślimakową Archimedesową (*Spiralis Archimedeae*), dla tego, że ją Archimedes naprzód w osobnéj książce uważał. Ponieważ w tym samym czasie punkt środkowy obieży promień, kiedy punkt B obieży obwód koła; przypuścimy że punkt środkowy przebiegł linią SM , kiedy punkt B opisał łuk BAN , nazwawszy $SM=z$, $SB=a$, łuk $BAN=s$, obwód cały koła $=P'a$; będzie $a:z=P'a:s$, czyli $s=P'z$, zrównanie na linią ślimakową. W niém $z=SM$, jest funkcją łuku s , czyli kąta tym łukiem zawartego; aże byż może nieskończoną liczba kątów odpowiadających temu samemu położeniu linii SM względem AB ; z má nieskończoną liczbę wartości, i linią ślimakową má nieskończoną liczbę zakrętów i wirów, w których się rościaga z obydwóch stron środka bez końca. Wprowadzając różne stosunki między chyżością punktu bieżącego po promieniu, i chyżością punktu idącego po obwodzie koła, wypadną różne wzory zrównań wyrażające różne gatunki linii ślimakowych, które będziemy

będziemy dopiero w stanie w wyższych Matematyki częściach uważać. Tu łatwo nam poznać przyczynę dla czego linie krzywe przestępne nazwano mechanicznymi: wyciągaia się bowiem ich własności z praw biegu punktoŵi opisuiaćemu nadanych, które raczey do Mechaniki niź do Geometrii należą.

Uczynmy sobie teraz obraz ogólny całej nauki z łańcucha prawd w tém dziele przebieżonych. Uważaiąc sposób poznawania umysłowi naszemu zostawiony, i ten do natury ilości stosuiąc, trafiliŵmy na ięzyk proŵy i ogólny do wyrażania różnych stanów i związków ilości. Aże te związki wypadaią z pewnych stosunków rzeczy, które rozum dostrzegą; weszliŵmy w poznanie ogólne zagadnień, które się mogą uwadze naszej nadarzyć, i w poznanie potrzeb rozumu do rozwiązania takowych zagadnień; a znosząc pierwsze z drugimi, odkryliŵmy naygłówniejszy podział zrównań na oznaczone, i nieoznaczone. Widzieliŵmy, że pierwsze są wystarczaiące do odkrycia prawdy, byleby znaleść prawidła na oddzielenie rzeczy nieznaney zawikłaney między znaney, z którymi się w zrównaniu wiąże: szukaliŵmy takowych prawideł, łącząc razem uwagę różnych wyrazów ilości, czyli funkcyi wchodzących w takowe zrównania i onym różne nadaiających nazwiska. I to było rzeczą pierwszego Tomu.

Zrównania nieoznaczone wyrażaiąc wartości wielu nieznanych od siebie spólnie zawisłych, poddały nam sposób poznawania odmian iednych ilości przez odmianę drugich, i zrodziły całą Geometrią linii krzywych. Biorąc iedną z takowych odmiennych ilości za główną, przywodziliŵmy zrównania niby do rodzaju oznaczonych, gdzie nam łatwo było ogólne prawidła w pierwszym Tomie wyłożone stosować do zrównań terażniejszych, i z nich wyciągać linii krzywych własności i podziały. Uważaiąc wszystkie odmiany zachodzić mogące w ilościach, dostrzegliŵmy, że te odmiany kończyć się mogą, albo też ciągnąć

Krótki wykład całego dzieła, s które go się opis Algebry wyciąga.

gnąć bezprześcannie: / ten ostatni rodzaj odmiany skazał nam pewne granice, do których się ilości wzrastając lub ubywając zbliżają, a w niektórych przykładach linii krzywych naprowadził nas na pierwsze początki całej Matematyki wyższej. RACHUNEK więc ALGEBRAICZNY jest język rozumowań o różnych stanach, związkach, i odmianach skończonych, ilości. Potrzeba nam jeszcze innego języka do wyrażania rozumowań na odmiany ilości w swoich granicach: i takim jest Rachunek Dyfferencyalny i Integralny, do któregośmy już krok w tym Tomie uczynili.

KONIEC DRUGIEGO TOMU.



WYPIS

W Y P I S

Materyi w drugim Tomie zawartych.

ROZDZIAŁ I.

Ilości i funkcy w zrównaniu iakiegokolwiek stopnia wchodzące wyrażają się przez linie geometryczne: z różnych odmian tym ilościom lub funkcyom nadanych, tłómaczą się odmiany, które odpowiadają liniom.

- §. 1. Wstęp z Algebry do Geometrii. na karcie 1.
Znaczenia Algebraiczne wykładają się w Lin-
iach Geometrycznych. kar. 3.
Podział Linii krzywych wyciągniony s podzia-
łu zrównań. 7.
- §. 2. Własności linii krzywych wyciągnione z na-
tury zrównań. 8.
- §. 3. Podług odmian współ-ufzykowanych wykla-
dają się sposoby odmiennienia zrównania. 14.
Z odmianą osi iak się powinno odmiennie zró-
wnanie? 16.
Przychodzi się do zrównania ogarniającego
wszystkie odmiany. 19.
- §. 4. Tłómaczy się istotny charakter zrównań; i
z niego wyciąga się ogólny podział linii krzywych. 20.
- §. 5. Przestrogi na zrównania złożone. 23.
- §. 6. Wykładają się własności ogólne linii każde-
go porządku. 24.
- §. 7. O podobieństwie linii krzywych. 27.

ROZDZIAŁ II.

Z uwąg ogólnych nad zrównaniem 2go stopnia tłó-
maczą się własności linii krzywych 2go porządku:
wyciągają się potem s szczególnych kondycyi gatun-
ki tychże linii.

- §. 8. Własności cięciw. 29.
Pierwszą własność linii 2go porządku. 31.
Drugą własność linii 2go porządku. 32.

§. 9. Własności SRZEDNIC i zrównania na ich oznaczenie.	34.
Pierwsza własność średnic.	38.
§. 10. Wynayduie się związek między średnicami iakiemikolwiek.	39.
Druga i trzecia własność średnic.	44.
Czwarta i piąta własność średnic.	45.
§. 11. Własności STYCZNYCH: sposób ich prowadzenia.	46.
§. 12. Dalsze własności średnic równiaąc ie ze stycznymi.	48.
Własności OGNISK i linii z ognisk wychodzących.	51.
Zrównanie biegunowe na wszystkie linie zgo porządku.	52.
§. 13. Gatunki linii krzywych zgo porządku.	53.
ELLIPSA i iej własności.	54.
Zrównanie biegunowe na Ellipsę.	60.
§. 14. PARABOLA i iej własności.	61. 62. 63.
Zrównanie biegunowe na Parabolę.	63.
§. 15. HYPERBOLA i iej własności.	64. 67.
Zrównanie biegunowe na Hyperbolę.	68.
§. 16. Hyperbola między LEDWO-NIESTYCZNEMI i iej własności.	68. 73.
Zbiór nauki w całym Rozdziale; s którego wypadu rozłączenie pozostałych uwąg o liniach krzywych.	73.

ROZDZIAŁ III.

Ilności odmienné zrównania nieoznaczonego odnoszą się do ostatnich granic swego wzrostu lub ubywania: s pierwszych granic tłómaczy się sposób poznawania odnóg niekończonych i równania iednych linii krzywych z drugiem; i z drugich granic wyciągają się własności odnóg skończonych, i sposób równania wszystkich linii krzywych s kotém.	
§. 17. Z uwągi nad ledwo-niest stycznymi wypada Teorya granic; wytyka się niedokładne tej Teoryi tłómaczenie.	75.
Początki Teoryi granic.	76. 81.
§. 18.	

- §. 18. Stofują się te początki do linii krzywych. 82.
 Kiedy termin najwyższego wymiaru zawiera
 iednego mnożnika rzetelnego iaką wypadła le-
 dwo-niestyczne prostą lub krzywą? 84.
- §. 19. Ledwo-niestyczne na dwa mnożniki rzetel-
 ne w terminie najwyższego wymiaru. 90.
 Uldtwiaią się trudności zachodzące w tym ra-
 chunku. 94.
- §. 20. Ledwo-niestyczne na trzy mnożniki rzetelne. 98.
 Uwaga ogólna nad ledwo-niestycznemi. 103.
- §. 21. O granicach ilości ubywających i własno-
 ściach linii krzywych, które od tych granic za-
 wiśły. 106.
- §. 22. Wynayduią się pod-styczne w liniach krzy-
 wych iakiegokolwiek porządku. 110.
 Spofob rozeznawania punktów dwoistych i t. d.
 w liniach krzywych. 112.
 Ogólne zrównania na linie takowe punkta ma-
 iące. 116.
- §. 23. Równaia się linie krzywe s kołem. 117.
 Tłomaczy się PROMIEN ŚCISKANIA. 118.
 Wynayduie się podpionowa w liniach krzywych. 119.
 Zrównanie na promień ściskania. 122.
 Rozeznanie położenia linii krzywey względem
 stycznej. 123.
 Podział linii krzywych na odnogi różnych po-
 rządków i cechy każdej z osobna. 124.
 Tłomaczy się punkt przegięcia, odbicia w lini-
 ach krzywych. tamże.
 Stofują się początki całego rozdziału do pozna-
 niā Cyfsoidy. 129.
 Zbiór krótki nauki w całym rozdziale, gdzie
 się tłomaczy drugi początek spofobu analityczne-
 go służący w Matematyce wyższej. 132.

ROZDZIAŁ IV.

- o przecięciach linii krzywych od prostych lub in-
 nych krzywych: i własnościach od tych przecięć
 zawiśłych.

§. 24.

- §. 24. Własność średnic rościagnioną do linii krzywych iakiegokolwiek porządku. 133.
 Cechy na rozeznanie środka w linii krzywej. 135.
 O średnicach ukośnych i ich liczbie. 137.
 Inny sposób wynaydowania średnic w liniach krzywych. 141.
 §. 25. Spóśób wyrażania linii krzywych przez zrównanie biorąc kąt za ilość odmienną. 143.
 Kiedy linia krzywa róz przeciętą od prostej. 144.
 Kiedy dwa razy jest przeciętą od prostej. 148.
 Przykład na linii MUSZLOWEY (Conchois), którój się naturą tłómaczy. 149.
 Kiedy linia krzywa trzy razy jest przeciętą od prostej. 151.
 §. 26. Przecięcia linii krzywej od prostej mające dwa zrównania. 152.
 Przecięcie linii krzywej od innej krzywej. 154.
 §. 27. Użycie przecięć linii krzywych do poznania składni zrównań. 158.
 Uwagi nad składnią zrównań. 160.

ROZDZIAŁ V.

Tłómaczą się powierzchnie ciół przez zrównania nieoznaczone między trzema odmiennymi ilościami.

- §. 28. Wyrażają się geometrycznie zrównania między trzema ilościami odmiennymi. 161.
 Odnosi się punkt powierzchni do trzech płaszczyzn głównych. 161.
 Wyrażenie zrównaniem powierzchni ciała, zawisto od wyrażenia linii, na tej powierzchni leżących, i przeciwnie. 165.
 §. 29. O powierzchniach ciół okrągłych, i liniach krzywych, które się rodzą przecinając te powierzchnie płaszczyzną. 167.
 Własności przecięć w ciałach ostro-graniastych. 168.
 Linie krzywe s przecięcia kuli wypadające. 170.
 Przecięcie walca i linie stąd zrodzone. 171.
 Przecięcie Ostro-kraga (Conus), i linie s tego przecięcia zrodzone. 173.

Linie

- Linie 2go porządku iak wypadają s przecięcia
ostro-kręga? 175.
- §. 30. Zrownania na powierzchni cięt powstają-
ce z obrotu linii krzywych 2go porządku. 176.
- O ciskanu linii krzywych s powierzchnni krzy-
wéy na płaszczyznę. 178.
- Użycie tego sposobu w sztuce rysunków. 180.

ROZDZIAŁ VI.

Właściwości linii krzywych PRZESTĘPNYCH i ich zna-
komitśże gatunki.

- §. 31. Ogólny obraz linii krzywych przestę-
pnych. 183.
- Podział linii przestępnych. 184.
- Linie krzywe zawiste od Logarytmów. 185.
- §. 32. Linie krzywe zawiste od łuków koła. 187.
- Właściwości linii krzywey kołowej (Cyclois). 188.
- Linie Slimakowe (Spirales), i ich zrownania. 190.
- Krótki wykład całego dzieła. 191.
- Co jest Rachunek Algebraiczny? 192.



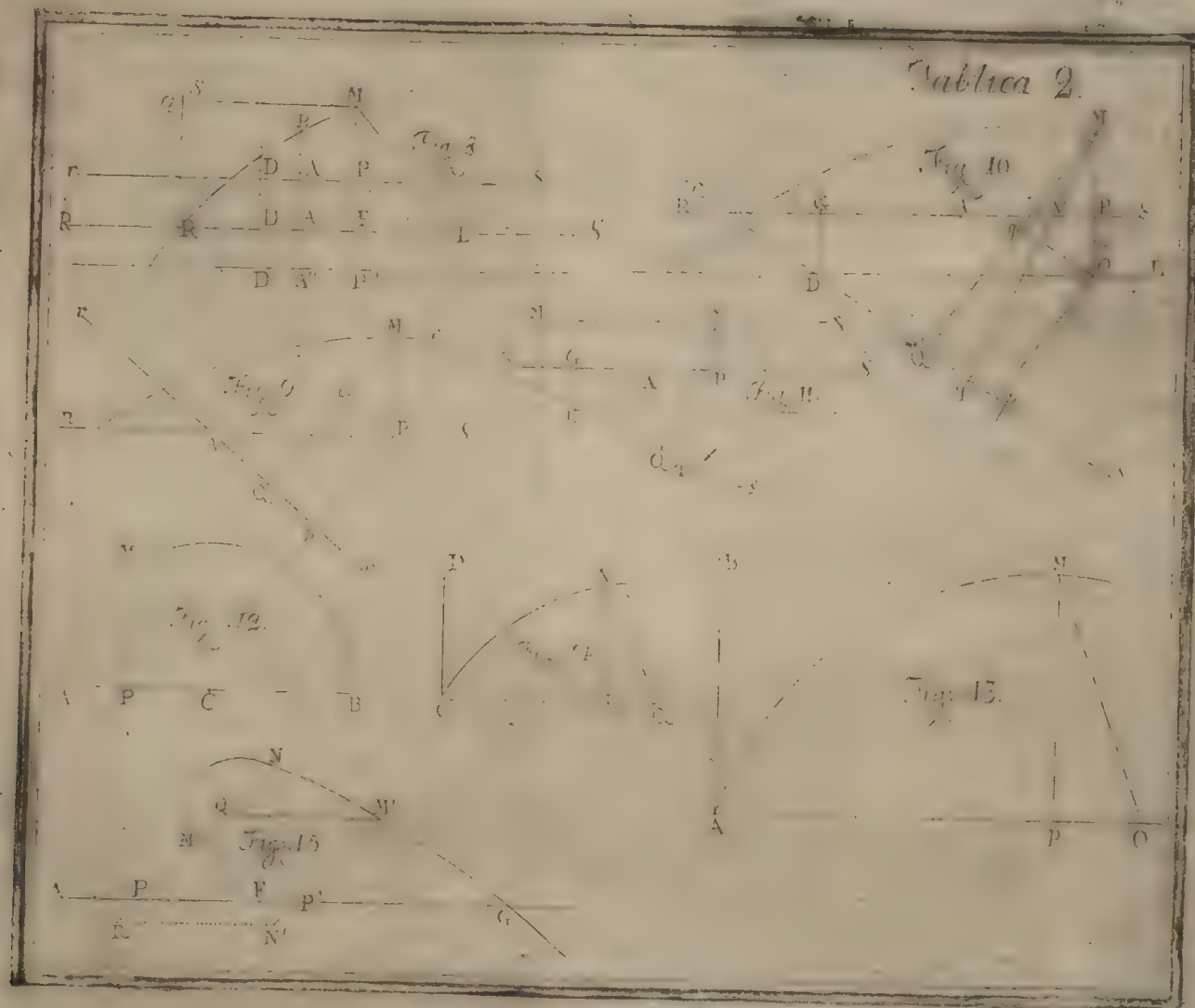
Do. Algebray

Do Geometrii Wyzszej

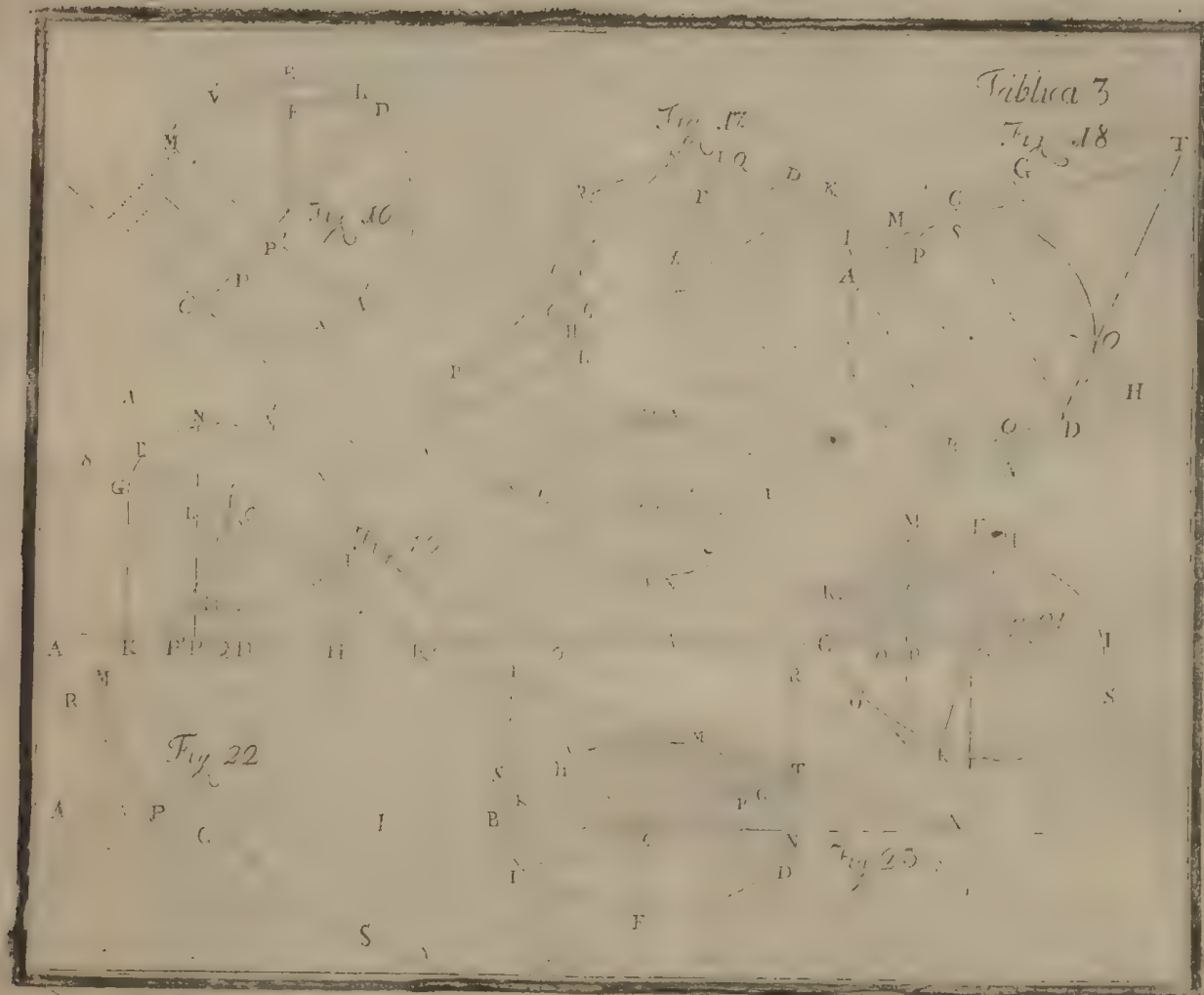
Tablica I.

BIBLIOTHECA
VNI. X. ILL.
CRACOVENSIS

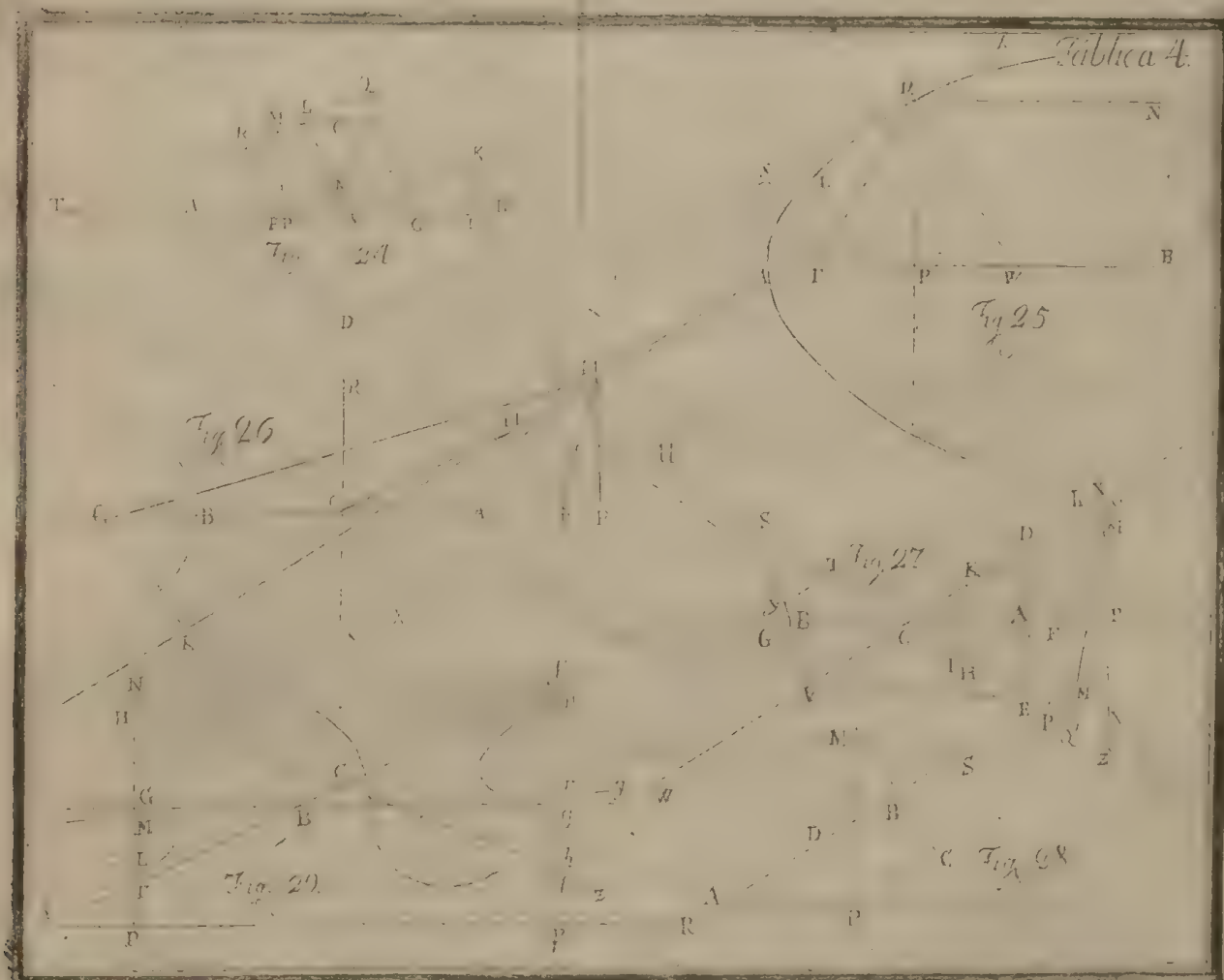
Tablica 2.



LIBRARY
OF THE
VIRGINIA
COMMONWEALTH

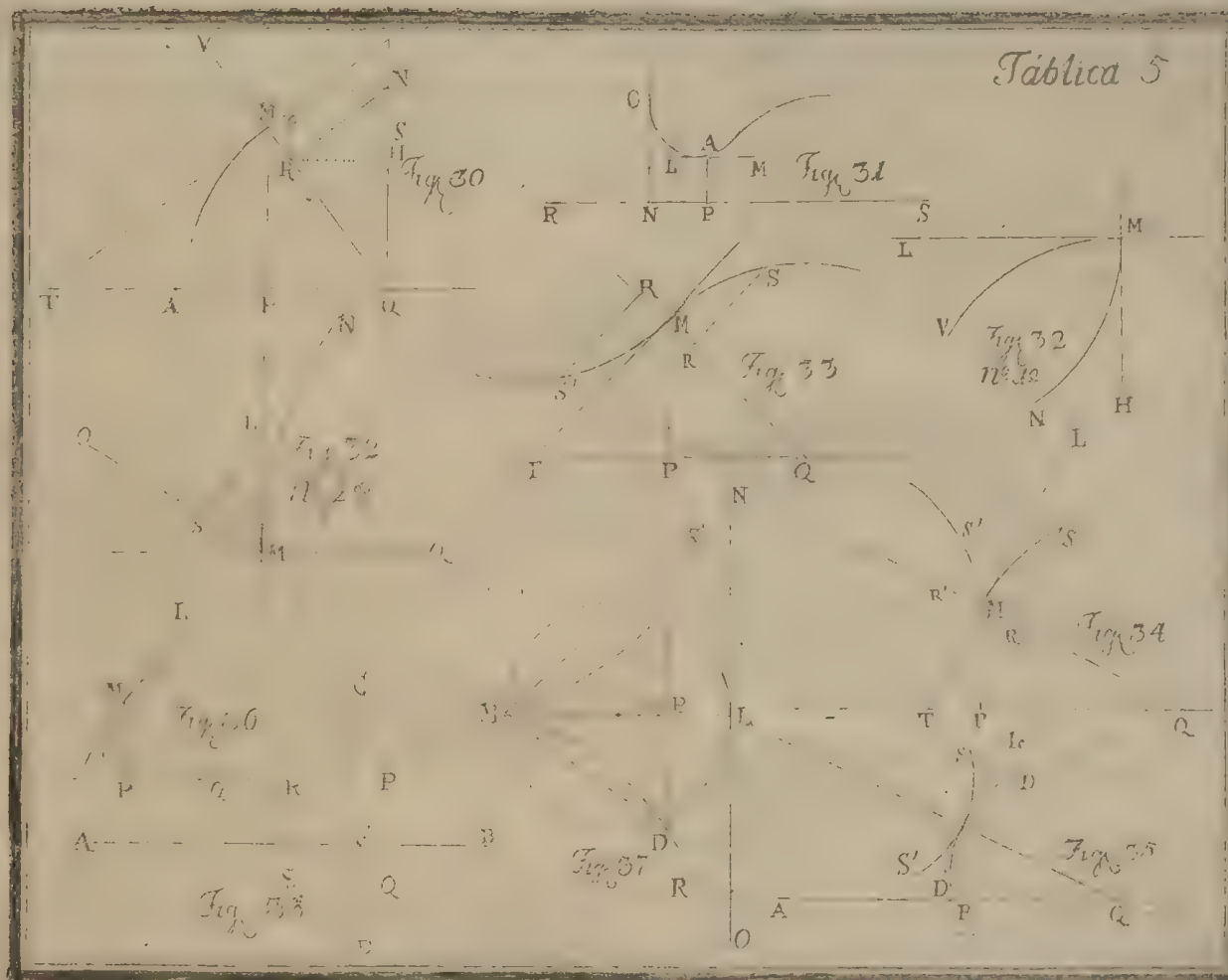


BIBLIOTHECA
VNIK. II
CRACOVIA

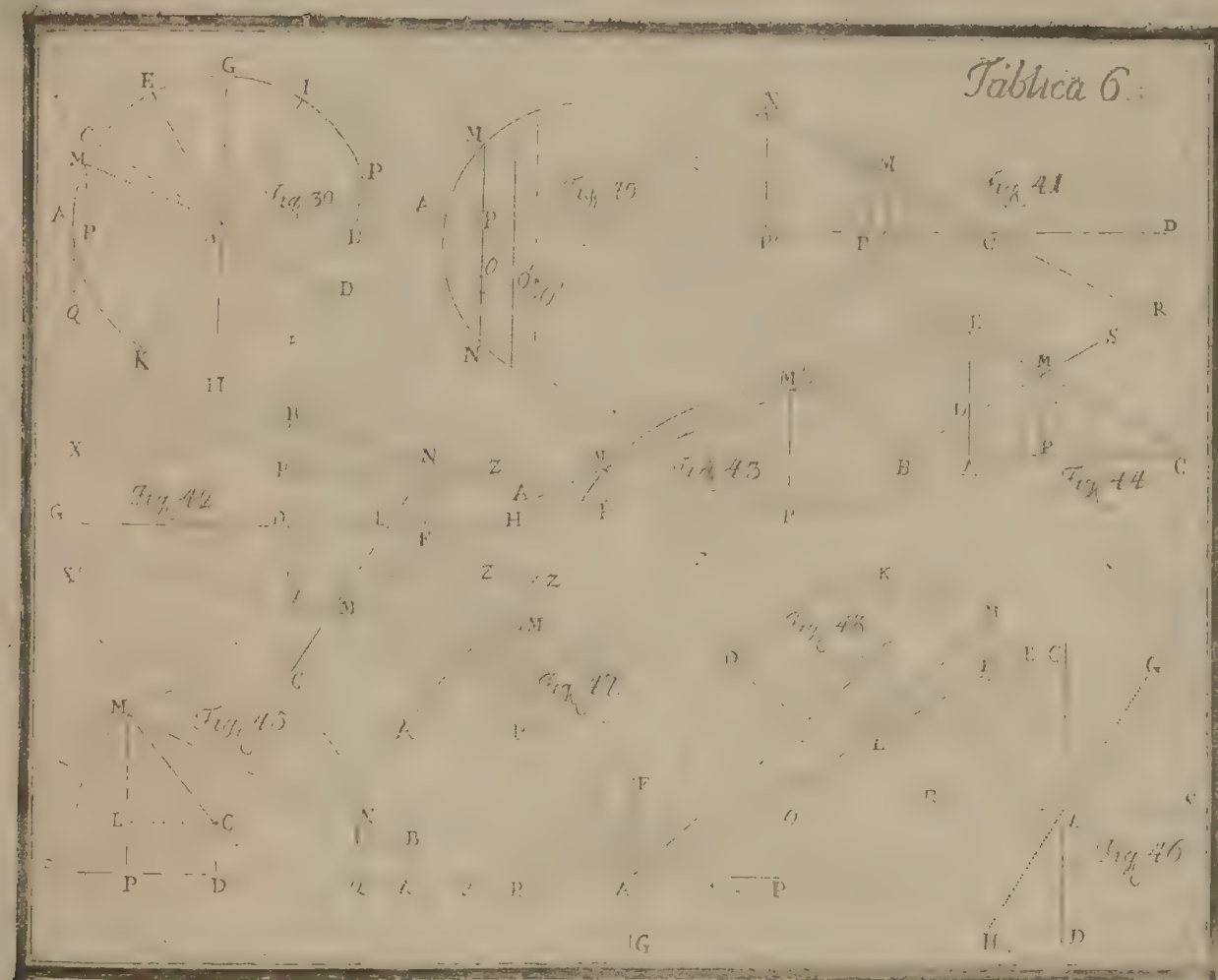


BIBLIOTHECA
VNI. (18) 1881.
CRAC.

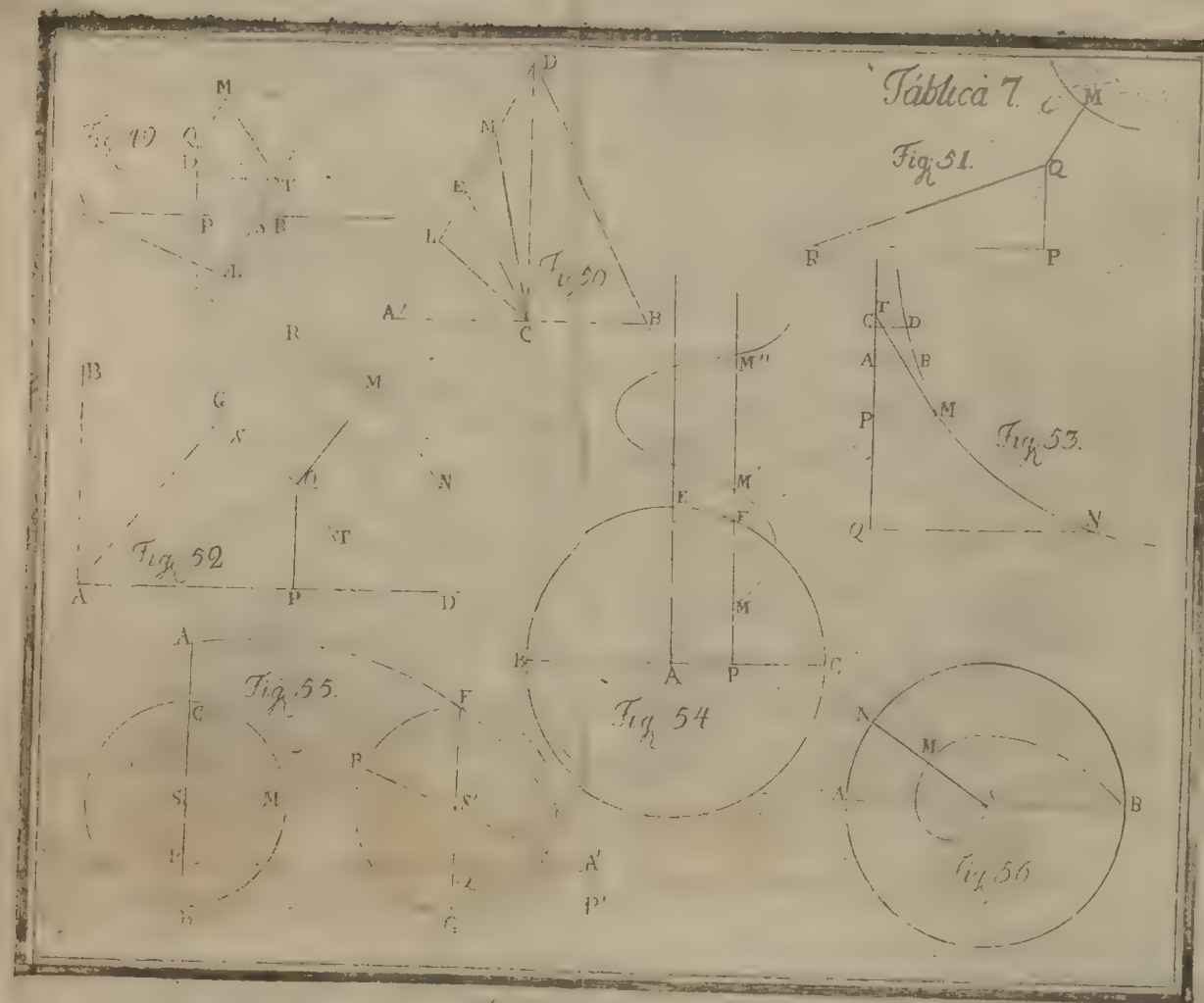
Tablica 5



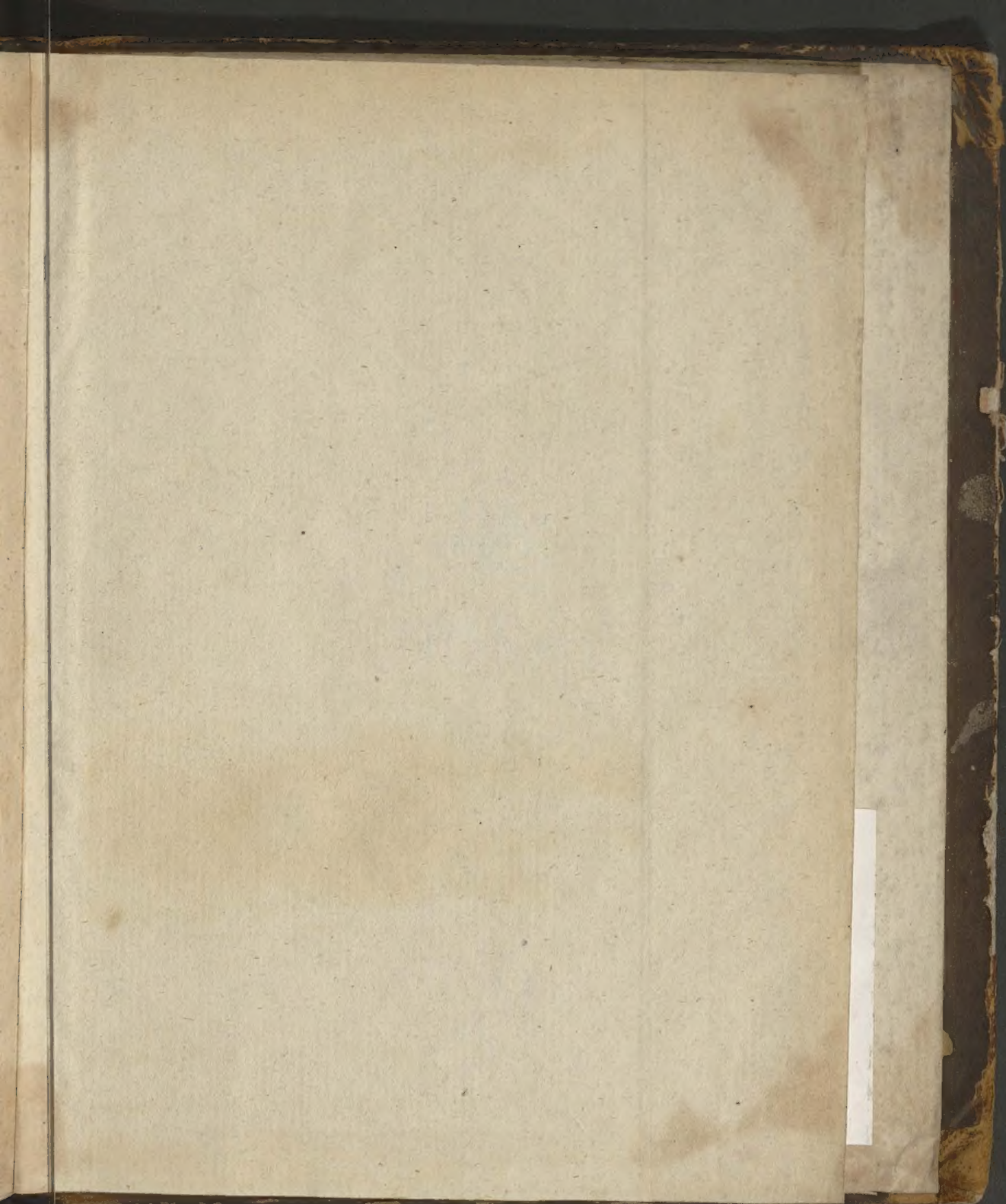
LIBRARY
OF THE
UNITED STATES
DEPARTMENT OF
COMMERCE

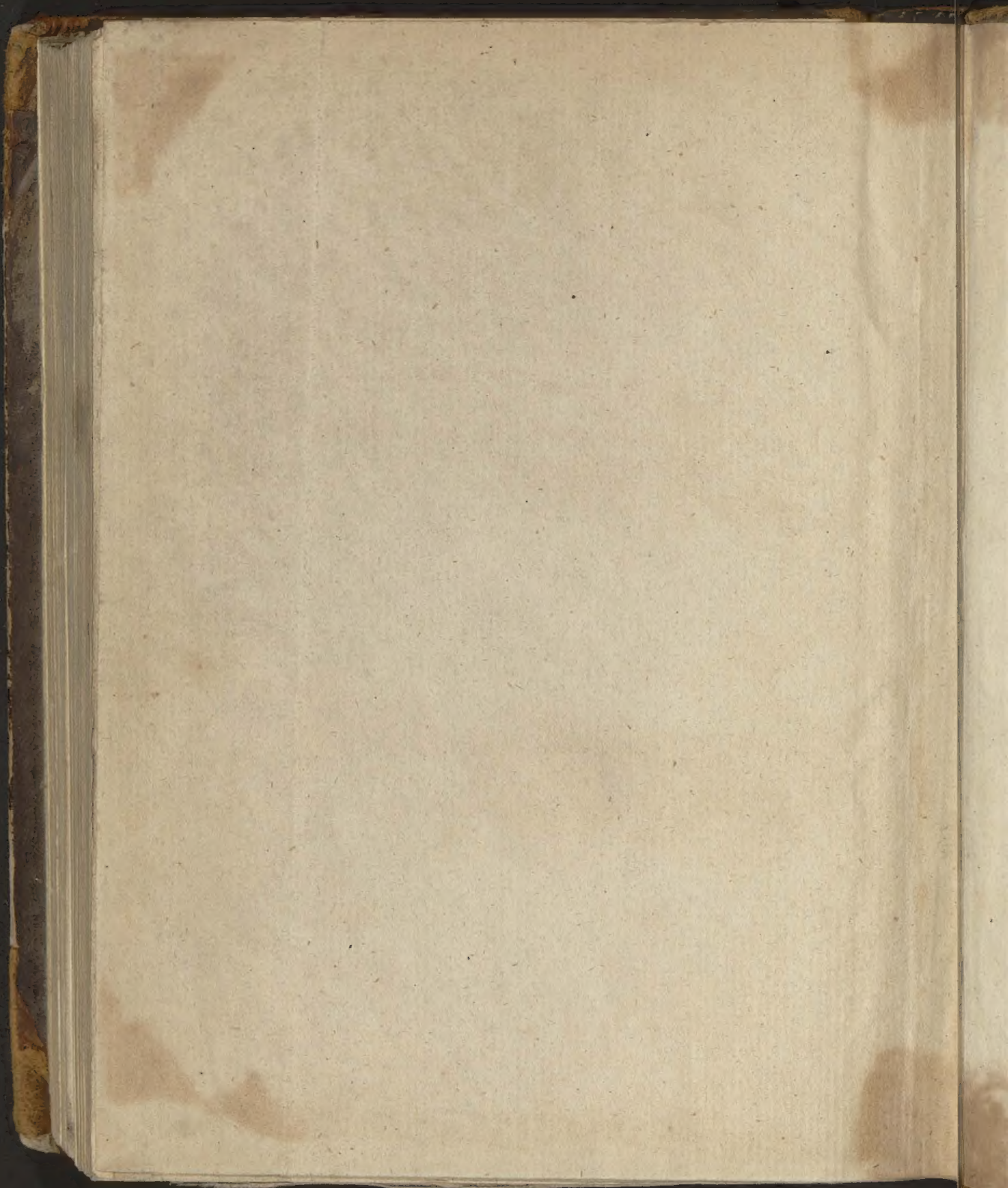




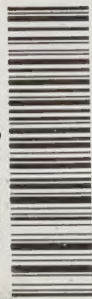


RECEIVED
JAN 11 1890
GRAND RAPIDS





Biblioteka Jagiellońska



stdr0009662

